

CORRIGÉ
EXAMEN FINAL - Session 1
(13/01/2026)

Problème 1 [5 points].

(a) [0,5 point] $\det(A) = 4$ et donc A est inversible avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) [0,5 point] $AA^t = A^2 \neq Id$ donc A n'est pas orthogonale

(c) [1 point]

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} &= (-1-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda)-1) - 1(-1-\lambda)-1) + 1 - (1-\lambda) \\ &= (-1-\lambda)(-\lambda + \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda + 1 + \lambda - 1 \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2) + 2\lambda + 2 \\ &= -(\lambda+1)(\lambda^2 - 2) + 2(\lambda+1) \\ &= (\lambda+1)(-\lambda^2 + 2 + 2) \\ &= (\lambda+1)(-(\lambda^2 - 4)) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2). \end{aligned}$$

(d) [0,5 point] L'équation $-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2) = 0$ implique que $\lambda = -1, 2$ ou -2 .

(e) [2 points] Pour $\lambda_1 = -1$,

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{rrr} x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & 2x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & = 0 \end{array}$$

On trouve la solution la solution générale $(x_1, -x_1, x_1)$.

Pour $\lambda_2 = 2$,

$$(A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{rrr} -3x_1 & x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & -3x_3 = 0 \end{array}$$

On trouve la solution générale $(x_1, 2x_1, x_1)$.

Pour $\lambda_3 = -2$,

$$(A - \lambda_3 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{rrr} x_1 & x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & x_3 = 0 \end{array}$$

On trouve la solution générale $(x_1, 0, -x_1)$.

(f) [0,5 point] Oui, il suffit de considérer les produits scalaires :

$$(1, 0, -1) \cdot (1, 2, 1) = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$(1, 0, -1) \cdot (1, -1, 1) = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$(1, 2, 1) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 1 + 1 = 0$$

Problème 2 [4 points].

(a) [1 point] $|z| = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = \sqrt{64(3+1)} = \sqrt{64 \cdot 4} = 8 \cdot 2 = 16$ et $\alpha = \arctan(\frac{8\sqrt{3}}{8}) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Comme $a, b > 0$ alors $\theta = \alpha$, donnant $z = 16e^{i\pi/3}$.

(b) [2 point] Soit $w = x + iy$. Nous cherchons les solutions à $w^2 = (x + iy)^2 = 8 + 8\sqrt{3}i$. Ce qui implique que $x^2 + i2xy - y^2 = 8 + 8\sqrt{3}i$. Ceci nous ramène à $x^2 - y^2 = 8$ et $2xy = 8\sqrt{3}$. En plus, on sait que $|w^2| = |8 + 8\sqrt{3}i|$ obtenant $x^2 + y^2 = 16$. En additionnant cette dernière égalité avec $x^2 - y^2 = 8$ on obtient $2x^2 = 24$ ou encore $x^2 = 12$ impliquant $x = \pm 2\sqrt{3}$ et on en déduit $y = \pm 2$. Comme $2xy = 8\sqrt{3} > 0$ alors x et y ont le même signe.

Ainsi, les racines carrées sont $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$.

On peut également trouver les racines en utilisant que

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right)$$

où r est le module de w , $k = 0, \dots, n-1$ et

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{if } x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{if } x < 0, \\ \pi/2 & \text{if } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ -\pi/2 & \text{if } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

Dans notre cas, $n = 2$ et $k = 0, 1$, on obtient

$$\sqrt{z} = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} + i2$$

et

$$\sqrt{z} = \cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} - i2.$$

(c) [1 point] On a

$$\begin{aligned} z + 4\sqrt{3}z - 16 &= z + 4\sqrt{3}\sqrt{z} - 16 \\ &= 8 + i8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 2i) - 16 \\ &= 8 + i8\sqrt{3} + 24 + i8\sqrt{3} - 16 \\ &= 16 + i16\sqrt{3} \\ &= 16(1 + i\sqrt{3}) \neq 0. \end{aligned}$$

Pareil pour $\sqrt{z} = -2\sqrt{3} - 2i$. Donc, il n'est pas vrai.

Problème 3 [5 points].

(a) [2 points] $f(x, y) = e^{(y-1)^2+(x-1)^2}$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2(x-1), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2(y-1)$$

A partir de $e^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2(x-1) = 0$ on en déduit que $x-1 = 0$ ou encore $x = 1$. Pareillement, à partir de $e^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2(y-1) = 0$ on en déduit que $y = 1$. Nous obtenons le seul point critique $(1, 1)$.

Maintenant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2 + 2xe^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2(x-1) = 2e^{(y-1)^2+(x-1)^2} (1 + 2x(x-1))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2 + 2ye^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2(y-1) = 2e^{(y-1)^2+(x-1)^2} (1 + 2y(y-1))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2(x-1)e^{(y-1)^2+(x-1)^2} 2(y-1) = e^{(y-1)^2+(x-1)^2} 4(y-1)(x-1)$$

Nous avons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) \right)^2 = (2)(2) - (0)^2 = 4 > 0$$

Alors, le point critique $(1, 1)$ est soit un minimum ou bien un maximum. Or $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 2 > 0$, donc $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 1)$ est un minimum.

(b) [0,5 point] Nous avons $f(0, 0) = e^2$ donc $(0, 0, 0)$ n'appartient pas à S_f .

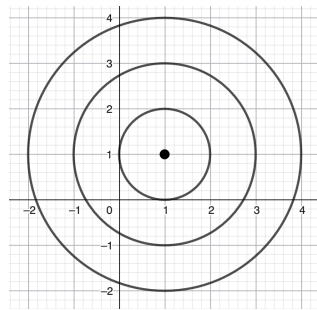
(c) [2 points] Nous avons un ensemble des cercles de centre $(1, 1)$ et rayons 0, 2 et 3 :

pour $\lambda = 1$, $e^{(y-1)^2+(x-1)^2} = 1$ et donc $(y-1)^2 + (x-1)^2 = 0$,

pour $\lambda = e$, $e^{(y-1)^2+(x-1)^2} = e$ et donc $(y-1)^2 + (x-1)^2 = 1$,

pour $\lambda = e^4$, $e^{(y-1)^2+(x-1)^2} = e^4$ et donc $(y-1)^2 + (x-1)^2 = 4 = 2^2$,

pour $\lambda = e^9$, $e^{(y-1)^2+(x-1)^2} = e^9$ et donc $(y-1)^2 + (x-1)^2 = 9 = 3^2$,



(d) [0,5 point] S_f correspond à la représentation (a) car cette représentation induit les courbes de niveau (cercles) et elle admet un minimum en $(1, 1, 1)$.

Problème 4 [4 points].

(a) [1 point] Le domaine de définition de w est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ qui n'est pas étoilé.

(b) [1+1 points] Nous avons $w = F(x, y)dx + G(x, y)dy = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$. Alors, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-2x}{y^2} = \frac{\partial G}{\partial x}$ et donc w est fermée. En plus, U est bien étoilé donc, d'après le théorème de Poincaré, w est bien exacte.

Nous cherchons f telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}.$$

En intégrant la première égalité par rapport à x on obtient que $f = \frac{x^2}{y} + H(y)$. En dérivant cette égalité par rapport à y on obtient $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + H'(y)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$ on en déduit que $H'(y) = 0$ et en intégrant par rapport à y les deux côtés de cette égalité nous obtenons $H(y) = K$ où K est une constante. D'où $f = \frac{x^2}{y} + K$.

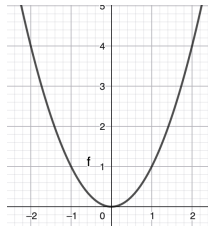
(c) [1 point] D'après un résultat du cours, le calcul ne dépend pas du chemin choisi, mais uniquement des extrémités pour une forme différentielle exacte. On trouve

$$\int_C w = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(0, 1) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(on peut aussi calculer l'intégrale directement mais un peu plus long).

Problème 5 [2 points].

(a) [0,5 point]



(b) [1,5 points] Considérons la paramétrisation $x = t$ et $y = t^2$ avec $-1 \leq t \leq 2$. Alors $dx = dt$ et $dy = 2t dt$, ainsi

$$\begin{aligned} \int_C xy \, dx + (x + y) \, dy &= \int_{-1}^2 (t^3 + (t + t^2)2t) dt \\ &= \int_{-1}^2 (3t^3 + 2t^2) dt \\ &= \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{3}{4}(16) + \frac{2}{3}(8) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{45}{4} + 6 = \frac{69}{4}. \end{aligned}$$

Problème 6 [3 points].

[1 point] Nous avons $y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = e^{t^2}$. L'équation homogène est $y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 0$ ou encore $y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)$ dont les solutions sont :

$$y(t) = Ce^{\int -\frac{1}{t}dt} = Ce^{-\ln(t)} = Ce^{\ln(t^{-1})} = C\frac{1}{t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

[1 point] On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = C(t)\frac{1}{t}$$

On a $y'_0(t) - \frac{1}{t}y_0(t) = e^{t^2}$ alors

$$C(t) \left(-\frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{t}C'(t) - \frac{1}{t}C(t)\frac{1}{t} = e^{t^2}$$

d'où $\frac{1}{t}C'(t) = e^{t^2}$ ou encore $C'(t) = te^{t^2}$. En intégrant par rapport à t en utilisant le changement de variable $u = t^2$ et donc $du = 2tdt$ on obtient

$$C(t) = \int C'(t)dt = \int te^{t^2}dt = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{t^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

En posant $K = 0$, nous avons $y_0(t) = \frac{1}{2}e^{t^2}\frac{1}{t} = \frac{1}{2t}e^{t^2}$.

[1 point] On a qu'une solution générale est

$$y(t) = e^{t^2}\frac{1}{2t} + C\frac{1}{t}$$

En utilisant que pour $t = 1$ on a $y = \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{2} = e^{1}\frac{1}{2} + C\frac{1}{1} = \frac{e}{2} + C$ obtenant $C = \frac{1}{2} - \frac{e}{2} = \frac{1}{2}(1 - e)$.
Donc, la solution générale du système est

$$y(t) = e^{t^2}\frac{1}{2t} + \frac{1}{2}(1 - e)\frac{1}{t} = \frac{1}{2t}(1 - e + 2e^{t^2}).$$