

EXAMEN FINAL - Session 1

(13/01/2026)

Durée : 2 h 00

Calculatrices, documents et portables interdits

Il n'est pas nécessaire de faire la totalité du sujet pour avoir la note maximale

(Justifier toutes les réponses)

Problème 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

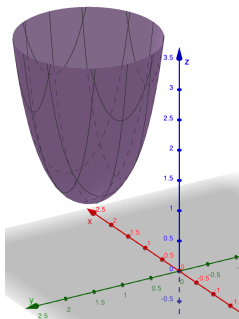
- (a) A est-elle inversible ?
- (b) A est-elle orthogonale ?
- (c) Calculer $\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$.
- (d) En déduire que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -2$.
- (e) Déterminer les vecteurs propres correspondants, c'est-à-dire, les solutions de $Ax = \lambda x$ pour chaque valeur propre λ .
- (f) Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres de A , sont-ils orthogonaux ?

Problème 2. Soit $z = 8 + i8\sqrt{3}$.

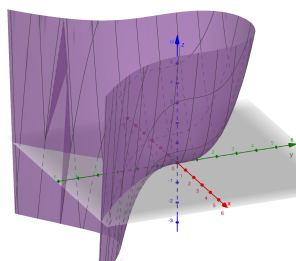
- (a) Exprimer z sous la forme exponentielle.
- (b) Trouver les racines carrées de z dans $\mathbb{C}$. Donnez les solutions sous les formes trigonométrique et cartésienne.
- (c) Est-il vrai que $z + 4\sqrt{3}z - 16 = 0$?

Problème 3. Soit $f(x, y) = e^{(y-1)^2 + (x-1)^2}$.

- (a) Déterminer les extrema locaux de $f(x, y)$ et leur nature.
- (b) La surface-graphe S_f contient-elle l'origine ?
- (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et C_λ la courbe de niveau λ de $f(x, y)$. Donner l'équation de C_λ et tracer C_λ pour $\lambda = 1, e, e^4, e^9$.
- (d) S_f correspond-t-elle à l'une des deux représentations ci-dessous ? Si ce n'est pas le cas, donner une représentation de S ? (justifiez votre réponse).



(a)



(b)

Problème 4. On considère la forme différentielle

$$w = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$$

(a) Dans quel domaine w est-elle définie ? Ce domaine est-il étoilé ?

Dans la suite, nous supposons que w est définie dans le domaine $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

(b) w est-elle exacte dans U ? Si c'est le cas chercher f tel que $df = w$.

(c) Calculer $\int_C w$ où C est l'arc d'un cercle de centre 0 et rayon 1 parcouru de $A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ vers $B = (0, 1)$ (*indication* : on pourra utiliser un résultat du cours, à préciser).

Problème 5. Soit C l'arc de la parabole $y = x^2$ avec $-1 \leq x \leq 2$.

(a) Tracer la courbe C .

(b) Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C xy \, dx + (x + y) \, dy$$

le long du C parcouru dans le sens direct.

Problème 6. On souhaite résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = e^{t^2} & (E) \\ y(1) = \frac{1}{2} & (C.I.) \end{cases}$$

(a) Trouver les solutions de l'équation homogène associée à (E) .

(b) Trouver une solution particulière de l'équation (E) (*suggestion* : considérer un changement de variable pour calculer une intégrale).

(c) En déduire la solution de l'équation (E) satisfaisant la condition initiale $(C.I.)$.

Valeurs remarquable des sin, cos et tan.

θ en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
θ en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie	0	0