MODULE HAX201X
ANNÉE 2024/2025

Examen de session 2
24 juin 2025
Durée : 3h

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.
Le barème est indicatif et pourra être modifié lors de la correction.

Questions de cours (8 points)

(1) Soit (u_n) une suite réelle.

  (a) Donner la définition de "(u_n) est une suite de Cauchy".

  (b) Redémontrer que si (u_n) est une suite de Cauchy, alors (u_n) est bornée.

(2) Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange, puis montrer que

$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3, \quad \forall x > 0.$$

(3) Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles positives vérifiant $a_n = O(b_n)$.
Montrer que si la série $\sum b_n$ est convergente, alors la série $\sum a_n$ est aussi convergente.

(4) Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries réelles suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}, \quad \sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n^2}$$

Exercice 2 (4 points)

Soit $\alpha > 0$.

(1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a l'encadrement

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

(2) En déduire que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(3) On considère la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$. Montrer que $S_n = \frac{3}{2}n^{\frac{2}{3}} + O(1)$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2 (9 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

et la suite (U_n) définie par

$$U_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

I. Étude de la fonction

(1) Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) < x$.
Indication : on étudiera la fonction $G(x) = (e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x})$.

(2) Montrer que le développement limité à l'ordre 4 de f en 0 est donné par

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

(3) En déduire la limite de $\dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$ lorsque $x \to 0$.

(4) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a le développement asymptotique

$$f(x) = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} + o(e^{-4x}).$$

II. Étude de la suite

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

(2) Montrer que la suite (U_n) converge vers 0.

(3) Calculer la limite de la suite $X_n = \dfrac{1}{U_n^2} - \dfrac{1}{U_{n-1}^2}$, $n \geq 1$.

(4) En appliquant le lemme de Cesàro (rappelé ci-dessous) à la suite (X_n), déterminer un équivalent simple de (U_n) quand $n \to \infty$.

Lemme de Cesàro. Soit (a_n) une suite réelle convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite de terme général

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

converge également vers ℓ.