ANALYSE 2

POLYCOPIÉ D'EXERCICES - HAX201X

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

ANNÉE 2025-2026

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. (♣) Trouver les limites des suites de terme général suivant :

$$u_n = \frac{4-n+3n^2}{7-n^2-n^4}, \qquad v_n = \frac{(2^n+1)(3^n-1)}{6^n-4} \qquad w_n = \frac{(6^n+1)((\frac{1}{2})^n+1)}{3^n}$$

$$x_n = \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^3+\ln(n)} \qquad y_n = (\ln(n^2+1))^{\frac{1}{n}} \qquad z_n = n(\tfrac{3}{2} - \textstyle\sum_{k=0}^n 3^{-k})$$

Exercice 2. (♣) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$ et (u_n) une suite d'éléments de I convergente vers x_0. Quelle est la limite de la suite $(\frac{f(u_n)-f(x_0)}{u_n-x_0})$? (*On suppose que* $u_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Calculer les limites des suites suivantes (elles dépendent toutes d'un paramètre réel α) :

$$u_n = n\sin(\tfrac{1}{n^\alpha}) \qquad v_n = n^\alpha(\ln(n+1)-\ln(n)) \qquad w_n = (1+\tfrac{\alpha}{n})^n.$$

Exercice 3. (♣) Quelles sont les suites réelles (u_n) satisfaisant les assertions suivantes ?

1. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \leq c.$
2. $\forall c \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \leq c.$
3. $\forall c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq c.$
4. $\exists c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq c.$

Exercice 4. (♣) Soit (u_n) une suite. Que pensez-vous des propositions suivantes :

(a) Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.
(b) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, il en est de même de (u_n).
(c) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de (u_n).

Exercice 5. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

(a) Que pensez-vous des propositions suivantes ?
- Si la suite (u_n) est convergente alors la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est convergente.
- Si la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

(b) Supposons maintenant que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est convergente. Montrer les propositions suivantes.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite des suites $(\frac{x^n}{n!})$ et $(\frac{x^{n^2}}{n!})$.

Exercice 6. On considère les suites $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln(n+1)$, et $b_n = H_n - \ln(n)$, définies pour $n \geq 1$. Soit $F :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = x - \ln(1+x)$.

(a) Montrer que $F(x) \geq 0$ pour tout $x > -1$.
(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a les relations $a_{n+1} - a_n = F(\frac{1}{n+1})$ et $b_{n+1} - b_n = -F(\frac{-1}{n+1})$.
(c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
(d) Quelle est la limite de la suite $(\frac{H_n}{\ln(n)})$?

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 7. Soit (u_n) une suite périodique.

(a) Montrer que (u_n) est bornée.
(b) Montrer que (u_{3n}) est périodique.
(c) Montrer que la suite $(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n})$ est convergente.
(d) Supposons de plus que (u_n) est croissante. En déduire que (u_n) est constante.

Exercice 8 (Lemme de Cesàro)**.** On suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Montrer que la suite $(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n})$ converge vers ℓ.

Exercice 9. (♠) On considère les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

(a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Qu'en déduit-on ?
(b) On note e leur limite commune. Montrer que $\forall n \geq 1, n!(e - u_n) \in]0, 1[$.
(c) En déduire que e est irrationnel.

Exercice 10. (♠) Soient $0 \leq u_0 \leq v_0$ deux réels. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par les récurrences suivantes : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
(b) Montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n-u_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
(c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Qu'en déduit-on ? *Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de* u_0 *et* v_0.

Exercice 11. (♠) Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si (u_n) converge, alors (u_n) est stationnaire.

Exercice 12. (♠) Soient (u_n) et (v_n) deux suites périodiques. Montrer que $(u_n + v_n)$ est périodique.

Feuille d'exercices 2

Exercice 13. (♣) Soient $a, b, u_0 \in \mathbb{R}$. On considère la suite définie par la récurrence : $u_{n+1} = au_n + b$.

(a) On suppose $a = 1$. Exprimer u_n en fonction de n.

(b) On suppose $a \neq 1$. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lequel la suite $(u_n - \lambda)$ soit géométrique.

(c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n. Dans quels cas la suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 14. (♣) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 \in [0, 3[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+6}$.

(a) Tracer sur un même dessin le graphe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Y représenter les premières valeurs de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$.

(b) Montrer que (u_n) est majorée et croissante. Qu'en déduit-on ?

(c) Déterminer la limite de (u_n).

(d) Que se passe-t-il si $u_0 \in [3, +\infty[$?

Exercice 15. (♣) Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $G(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 3)$. On considère la suite (U_n) définie par la récurrence : $U_0 \geq 0$ et $U_{n+1} = G(U_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la suite (U_n) est monotone.

(b) Déterminer pour quels $U_0 \geq 0$ la suite (U_n) est convergente.

(c) Montrer que G définit une application contractante de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même.

(d) Considérons le cas où $U_0 = \frac{1}{2}$. Montrer alors que $|U_n - 1| \leq 2^{-(n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{x+3}{2x}$, et (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in]0, \frac{3}{2}[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Tracer sur un même dessin le graphe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Représenter les premières valeurs de la suite (u_n) pour $u_0 = 1$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \in]\frac{3}{2}, +\infty[$ et $u_{2n} \in]0, \frac{3}{2}[$.

(c) On pose $v_n = u_{2n}$. Montrer que (v_n) est une suite récurrente pour une fonction que l'on précisera. En déduire que la suite (v_n) est croissante.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \frac{3}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = \frac{3}{2}$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

(e) Que se passe-t-il si $u_0 \in [\frac{3}{2}, +\infty[$?

Exercice 17. Soit $a > 0$. On définit la suite (u_n) par récurrence : $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On se propose de montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

(a) Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{0.1}$$

et en déduire que $u_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 1$.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

(c) On pose $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$ pour $n \geq 1$.

- Montrer en utilisant (0.1) que $v_{n+1} \leq v_n^2, \forall n \geq 1$.
- En déduire que pour tout $n \geq p \geq 1$, on a

$$0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{u_p - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-p}}.$$

- Application : trouver un nombre rationnel x tel que $|x - \sqrt{10}| \leq 10^{-8}$ (sans calculatrice).

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 18. On considère la suite (V_n) définie par récurrence : $V_0 = 0$ et $V_{n+1} = V_n + e^{V_n} - 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que (V_n) est décroissante. Quelle est sa limite ?
(b) Montrer que $V_n \geq -3n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(c) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $V_n \leq C - 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(d) En utilisant la question précédente, montrer que $V_n \leq -3n + e^C \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k}, \quad \forall n \geq 1$.
(e) En déduire que $V_n \sim -3n$

Exercice 19. (♠) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, et la suite récurrente définie par les relations : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer les solutions $\alpha < \beta$ de l'équation $f(x) = x$. *Dans la suite on utilisera le fait que $\beta \geq 3$ et $|\alpha| \geq 1,23$.*
(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x - \beta| \leq 2 \implies |f(x) - \beta| \geq 2|x - \beta|$.
(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x - \alpha| \leq 10^{-2} \implies |f(x) - \alpha| \geq \frac{6}{5}|x - \alpha|$.
(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 20. (♠) Soit $f\ :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{2x^2}$, et (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Tracer sur un même dessin le graphe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Y représenter les premières valeurs de la suite (u_n).
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \in]1, +\infty[$ et $u_{2n} \in]0, 1[$.
(c) On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) et (w_n) sont des suites récurrentes pour une fonction que l'on précisera. En déduire que (v_n) est décroissante et (w_n) est croissante.
(d) Montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} w_n = +\infty$. La suite (u_n) est-elle convergente ?
(e) Que se passe-t-il si $u_0 \in [1, +\infty[$?

Exercice 21. (♠) Pour $n \geq 1$, on considère la fonction polynomiale $f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, notée a_n.
2. (a) Montrer que (a_n) est strictement décroissante.
   (b) Montrer que (a_n) est minorée.
   (c) Justifier que (a_n) converge. On note ℓ sa limite.
3. (a) Montrer que la suite $(f_n(\ell))$ converge vers 0.
   (b) Exprimer $f_n(\ell)$ en fonction de n et ℓ.
   (c) Déduire de ce qui précède que $\ell = \frac{1}{2}$.

Feuille d'exercices 3

Exercice 22. (♣) Soit (u_n) la suite des décimales de π. Montrer que (u_n) admet une sous-suite constante.

Exercice 23. (♣) Soit (u_n) une suite réelle. Est-il vrai que

(a) si $u_n \to +\infty$, alors toute suite extraite $u_{\varphi(n)} \to +\infty$?
(b) si (u_n) est croissante, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est croissante ?
(c) si (u_n) est bornée, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est bornée ?
(d) si (u_n) est périodique, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est périodique ?

Exercice 24. (♣) Soit (U_n) une suite qui converge vers un réel ℓ. Déterminer les valeurs d'adhérence des suites de terme général

$$U_n \sin(\frac{n\pi}{3}), \quad U_n + \cos(\frac{n\pi}{3}).$$

Exercice 25. (♣) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que les sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 26. (♣)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) (u_n) est non-majorée.
(b) (u_n) admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$.
(c) (u_n) admet une sous-suite croissante qui tend vers $+\infty$.

Exercice 27. (♣) Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$. Expliciter les suites de terme général $\bar{u}_n := \sup\{u_k, k \geq n\}$ et $\underline{u}_n := \inf\{u_k, k \geq n\}$. En déduire les limites supérieures et inférieures de (u_n).

Exercice 28. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Monter que $\liminf u_n = 0$ si et seulement si $\limsup \frac{1}{u_n} = +\infty$.
(b) Monter que si $\liminf u_n = \alpha > 0$ alors $\limsup \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\alpha}$.

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 29. À toute suite $a = (a_n)$ de termes positifs on associe $R(a) := \limsup (a_n)^{\frac{1}{n}} \in [0, \infty]$.

(a) Calculer $R(a)$ pour les suites $a_n = n^\alpha$, $a_n = q^n$ et $a_n = q^{n^2}$.
(b) Montrer que $R(a) = 0$ si et seulement si $\forall r > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0$.
(c) Montrer que $R(a) = +\infty$ si et seulement si $\forall r > 0$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Exercice 30. (♠) Soit $u := (u_n)$ une suite telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Notons $\mathrm{AD}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (u_n).

(a) Donner un exemple où $\mathrm{AD}(u) = \emptyset$.
(b) Supposons maintenant que $\mathrm{AD}(u) \neq \emptyset$. Montrer que si $a < b$ sont deux valeurs d'adhérences de la suite (u_n), alors $[a, b] \subset \mathrm{AD}(u)$.

Exercice 31. (♠) Lemme sous-additif

Soit (u_n) une suite telle que

$$u_{n+m} \leq u_n + u_m, \quad \forall m, n \geq 1.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $(\frac{u_n}{n})$ tend vers $\ell := \inf\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(a) Soit $k \geq 1$ et $r \in \{0, \ldots, k-1\}$. Montrer que $u_{kq+r} \leq k u_q + u_r$ pour tout $q \geq 1$.
(b) En déduire que $\limsup \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q}$, pour tout $q \geq 1$.
(c) Conclure.

Feuille d'exercices 4

Exercice 32. (♣) Montrer que $u_n = (-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 33. (♣) Pour tout $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que (H_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 34. (♣) Soient (u_n) une suite réelle et $\rho \in]0, 1[$. On suppose que pour tout $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \rho |u_n - u_{n-1}|.$$

Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 35. (♣) Soit (x_n) la suite définie par récurrence par $x_0 = \frac{3}{2}$ et

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n est un nombre rationnel appartenant à l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$.

(b) Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy. *On utilisera l'exercice 34.*

(c) Est-ce que la limite de la suite (x_n) est un nombre rationnel ?

Exercice 36. Les questions suivantes utilisent les sommes de Riemann.

(a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

(b) Soit $\alpha > 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$.

(c) Soit $\alpha > 0$. Déterminer un équivalent simple de la suite $S_n^\alpha := \sum_{k=1}^n k^\alpha$.

Exercice 37. On considère la suite $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

(a) Montrer que $U_{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

(b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} U_n = \ln(2)$.

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 38. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

(a) On suppose que l'intervalle I est borné et que f est uniformément continue. Montrer que f est bornée.

(b) Montrer que f est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites (a_n) et (b_n) d'éléments de I, on a $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} |f(a_n) - f(b_n)| = 0$.

(c) Déduire le théorème de Heine du point précédent.

Exercice 39. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour les questions suivantes, on pourra utiliser le point (b) de l'exercice 38.

(a) On suppose que la fonction f est 1-périodique. Montrer que f est uniformément continue.

(b) Montrer que si f admet des limites (finies) en $+\infty$ et en $-\infty$, alors f est uniformément continue.

(c) Est-ce que la fonction $f(x) = \sin(x^2)$ est uniformément continue ?

Feuille d'exercices 5

Exercice 40. (♣) Tracer sur un même dessin les graphes des fonctions $x^3, x, \sqrt{x}, x^{\frac{1}{5}}, 1, x^{-1}, x^{-7}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 41. (♣) Soit $\alpha > \beta$. Montrer que si $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ alors $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 42. (♣) Donner un équivalent simple en $+\infty$ et en 0 de

(a) $-x^4 + x^3 + x^2 + 1$,
(b) $\frac{x^2+6x-5}{7x^2-2x-3}$,
(c) $2^{3x} + 3^{2x}$,
(d) $x^2 2^x - \frac{3^x}{x^3}$,
(e) $\sqrt{x^2+5}$,
(f) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$,
(g) $\frac{x^2+\ln(x)}{x^2\ln(x)}$,
(h) $x^2\ln(x)^3 - x^3\ln(x)^2$,
(i) $e^{\frac{1}{x}}x^5\ln(x) - e^x x^4 \ln(x)^2$,
(j) $\ln(e^{2x} - e^x)$.

Exercice 43. (♣) Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 5x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 5x = 0$.
(b) Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, alors $f(x)^3 \underset{x_0}{\sim} g(x)^3$.
(c) Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, alors $e^{f(x)} \underset{x_0}{\sim} e^{g(x)}$.

Exercice 44. (♣) Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.
(b) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.
(c) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.
(d) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors $f(x) \underset{x_0}{=} O(1)$.

Exercice 45. (♣) Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Déterminer toutes les fonctions f telles que $f(x) \underset{x_0}{\sim} 0$.

Exercice 46. Montrer que $e^{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} e^{g(x)}$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$. En déduire un équivalent simple en $+\infty$ de $e^{2x^2-3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}}$.

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 47. (♠) Soit $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ et $\ell \in (\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\})\setminus\{1\}$. On suppose que $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$. Montrer que $\ln f(x) \underset{x_0}{\sim} \ln g(x)$. Est-ce encore vrai pour $\ell = 1$?

Exercice 48. (♠) 48 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq 2f\left(\frac{x}{3}\right)$.

(a) Justifier que f admet un maximum sur $[0, 1]$.
(b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, f(x) \leq 2^k f\left(\frac{x}{3^k}\right)$.
(c) On pose $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} | \frac{x}{3^k} \leq 1\}$. Justifier l'existence de k_0 et montrer que $k_0 \leq \frac{\ln x}{\ln 3} + 1$.
(d) Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(x^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right)$.

Feuille d'exercices 6

Exercice 49. (♣) Donner les DL_2, DL_4, DL_{10} et DL_{2017} en 0 de $f(x) = x^{58} + 2x^{12} + 5x^{10} + x^3$.

Exercice 50. (♣) Montrer que si f est une fonction paire (resp. impaire), alors les termes impairs (resp. pairs) de ses DL en 0 sont nuls.

Exercice 51. (♣) Sommes de DL.
(a) Donner le DL_5 en 0 de $\frac{1}{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$.
(b) Donner le DL_7 en 0 de $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (cosinus hyperbolique).
(c) Donner le DL_8 en 0 de $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (sinus hyperbolique).

Exercice 52. Produits de DL.
(a) (♣) Donner le DL_3 en 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$.
(b) (♣) Donner le DL_8 en 0 de $f(x) = \sqrt{1+x^2}\ln(1+x^3)$. En déduire la valeur des dérivées $f^{(k)}(0)$ pour $1 \leq k \leq 8$.
(c) Donner le DL_6 en 0 de $(1 - \mathrm{ch}(x))\sin x$.

Exercice 53. DL en $x_0 \neq 0$.
(a) (♣) Donner les DL_4 en 2 des fonctions e^x, $(1+x)^\alpha$ et $\ln(1+x)$.
(b) Donner le DL_5 en $\frac{\pi}{3}$ de $\cos x$.

Exercice 54. Composition de DL.
(a) (♣) Donner le DL_4 en 0 de $\ln(1+\cos x)$.
(b) Donner le DL_2 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$.
(c) Donner le DL_4 de $\sqrt[3]{1+\cos x}$ en 0.

Exercice 55. Divisions de DL.
(a) (♣) Donner le DL_3 en 1 de $\frac{1+x}{2+x}$.
(b) (♣) Donner le DL_5 en 0 de $\tan(x)$.
(c) Donner le DL_3 en 0 de $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ (tangente hyperbolique).
(d) Donner le DL_4 en 0 de $\frac{x\cos x}{\sin x}$. En déduire le DL_3 en 0 de $\mathrm{cotan}(x) - \frac{1}{x}$.

Exercice 56. La fonction $\frac{1}{1+|x|^3}$ admet-elle un DL_2 en 0 ? un DL_3 en 0 ? un DL_4 en 0 ?

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 57. (♠) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
(b) Montrer que f est continue.
(c) Montrer que f est de classe C^1.
(d) Montrer que f est de classe C^2.

Exercice 58. (♠) On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynome P_n tel que $\forall x > 0, g^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$.
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = 0$.
(c) En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Quels sont ses DL en 0 ?
(d) Existe-t-il une autre fonction ayant les mêmes DL en 0 que g ?

Feuille d'exercices 7

Exercice 59. (♣) Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $f(t) = \sqrt{t}$ entre $a = 100$ et $b = 101$. En déduire une approximation décimale de $\sqrt{101}$ à 10^{-6} près.

Exercice 60. (♣) Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction $\cos$ sur $[0, x]$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}| \leq \frac{x^6}{6!}$, puis une approximation rationnelle de $\cos(0,1)$ à 10^{-8} près.

Exercice 61. (♣)

(a) Montrer que $\forall x > 0$, On a la relation

$$1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x^2 < \sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3.$$

En déduire une valeur approchée de $\sqrt[3]{1,03}$ à 10^{-5} près.

(b) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a l'encadrement

$$(\star) \quad t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4(1+t)^4}.$$

En déduire une approximation de $\ln(1,1)$ à 10^{-5} près. *On se servira du fait que* $(1,1)^{-4} \simeq 0,68$.

Exercice 62. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(a) Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes. Qu'en déduit-on ?

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et calculer la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $\ln(1+x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} < \ln(1+x) < \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}.$$

(d) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ln(2)$.

Exercice 63. (a) Soit $\beta > 1$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1-\beta}{x^\beta} < \frac{1}{(x+1)^{\beta-1}} - \frac{1}{x^{\beta-1}} < \frac{1-\beta}{(x+1)^\beta}.$$

(b) En déduire que $\forall n \geq 1$,

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta} \leq 1 + \frac{1}{(1-\beta)n^{\beta-1}} - \frac{1}{1-\beta}.$$

(c) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}\right)$ converge.

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 64. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f''(c) = 0$. *Indication : Lemme de Rolle.*

Exercice 65. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{x^n}{n!})$ tend vers 0.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!}| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c) Quelle est la limite de la suite $(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!})$?

Exercice 66. (♠) Soit $0 < \beta < 1$. En vous inspirant de l'exercice 63, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\beta}}{(1-\beta)}.$$

Exercice 67. (♠) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = x + x^2 \cos(\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et justifier que $f'(0) = 1$.

(b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+2)}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+1)}}\right)$.

  (i) Justifier que $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$. En déduire que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+2)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(2n+1)}} = \frac{1}{2(2n+1)\sqrt{\pi(2n+2)}} + o\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

  lorsque $n \to +\infty$.

  (ii) Montrer que

$$u_n \sim \frac{-1}{4\sqrt{2\pi} n^{\frac{3}{2}}}$$

  lorsque $n \to \infty$.

(c) Montrer qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+1)}}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+2)}}\right)$. En déduire que f n'est croissante sur aucun voisinage de 0.

(d) Tracer le graphe de la fonction f.

(e) Est-il vrai que si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x_0) > 0$, alors f est croissante sur un voisinage de x_0 ?

Feuille d'exercices 8

Exercice 68. (♣) Donner le développement limité en 0, à l'ordre 20, de la fonction $F(x) = x^4 \cos(x^3)$. En déduire la valeur de la dérivée $F^{(16)}(0)$.

Exercice 69. (♣) Déterminer la limite de $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{x+x^2}$ lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 70. (♣) Donner un équivalent simple de $\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{x^4+1}$ en $+\infty$, et ensuite en 0.

Exercice 71. (♣) Déterminer la limite en 0 de

$$\frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2 \sin^2 x}. \qquad \textit{Rappel :}\ \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Exercice 72. Déterminer la limite en 0 de

(a) (♣) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ (b) (♣) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (c) $\frac{\sin(x^2)-\sin(x)^2}{x^4}$ (d) $\frac{1}{x^2} - \mathrm{cotan}^2 x$

Exercice 73. Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote de

(a) (♣)$(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$ (b) $\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}$ (c) $\ln(e^{x^2} - e^x - 1)$

Exercice 74. Développements asymptotiques. Montrer que

(a) (♣) $\sqrt{x+\sqrt{x}} \underset{0^+}{=} x^{\frac{1}{4}} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{2} - \frac{x^{\frac{5}{4}}}{8} + o(x^{\frac{5}{4}})$

(b) (♣) $\sqrt{x+\sqrt{x}} \underset{+\infty}{=} \sqrt{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{x}} + \frac{1}{16x} + o(\frac{1}{x})$

(c) $\frac{1}{x+\ln x} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{\ln^2 x}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})$

Exercice 75. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, il existe un unique $e > \alpha_n > 1$ satisfaisant la relation : $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.
(b) Montrer que (α_n) est décroissante (on utilisera la monotonie de la fonction de f).
(c) Montrer que (α_n) converge vers 1.
(d) Déterminer le DL à l'ordre 2 de f en $x = 1$.
(e) Montrer que (α_n) admet le développement asymptotique

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 76. On considère la suite

$$u_n := \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n}{\sqrt{n^2+1}-n}, \quad n \geq 0,$$

et la fonction $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par la relation

$$F(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}, \quad x \neq 0.$$

(a) Exprimer les termes de la suite (u_n) au moyen de la fonction F.
(b) Calculer le $DL_2(0)$ de la fonction F.
(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
(d) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, calculer la limite de la suite $n^\alpha(u_n - \frac{1}{2})$.

Exercice 77. (♠)
Question préliminaire : montrer que $\frac{e^x-1}{x} > 0, \forall x \neq 0$.
On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et

$$F(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right), \quad \forall x \neq 0.$$

(a) Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction F.
(b) Déduire de la question (a) la limite de la suite $u_n = n\Big(\ln(n) + \ln(e^{\frac{1}{n}}-1)\Big), \quad n \geq 1.$
(c) Montrer que lorsque $x \to +\infty$, on a le développement asymptotique

$$F(x) \underset{+\infty}{=} x - \ln(x) - e^{-x} + o(e^{-x}).$$

(d) Donner la tangente et la position par rapport à la tangente en $\ln(4)$ de la fonction F. *On utilisera le fait que* $\ln(4) \simeq 1,38$.

Exercice 78. (♠) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, et (u_n) la suite définie par récurrence par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

I : Étude de la fonction

(a) Montrer que $0 < f(x) < x$ pour tout $x > 0$.
(b) Montrer que le développement limité à l'ordre 5 de f en 0 est donné par

$$f(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

(c) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{3}$.
(d) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a le développement asymptotique

$$f(x) = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} + o(e^{-4x}).$$

II : Étude de la suite

(a) Montrer que (u_n) est une suite strictement décroissante convergente vers 0.
(b) Calculer la limite de la suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.
(c) En appliquant le lemme de Cesàro à la suite (v_n), déterminer un équivalent de (u_n) quand $n \to \infty$.

Feuille d'exercices 9

Exercice 79. (♣) Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

(a) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n^2+1}$
(b) $u_n = \frac{3^n - n^3}{4^n - 3^n}$
(c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$
(d) $u_n = \frac{1}{n!}$
(e) $u_n = \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$
(f) $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$
(g) $u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$
(h) $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$
(i) $u_n = \frac{(-1)^n n}{n+\sqrt{n}}$
(j) $u_n = \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^3+1}$
(k) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 80. (♣) Soit a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

(a) Vérifier que la suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b + 1 = 0$.
(b) Déterminer a et b pour que la série $\sum u_n$ soit convergente. Dans ce cas, que vaut la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$?

Exercice 81. (♣)
(a) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.
(b) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ est divergente.
(c) Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 82. (♣) Au moyen du critère de d'Alembert, étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes (toutes dépendent d'un paramètre $\alpha > 0$) :

(a) $u_n = \alpha^{-n^2} n!$
(b) $u_n = \frac{n!}{n^{\alpha n}}$
(c) $u_n = \frac{n^\alpha (\ln(n+1))^n}{n!}$.

Exercice 83. Au moyen d'une comparaison avec une intégrale, donner des équivalents pour les suites suivantes

(a) $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
(b) $B_n = \ln(n!)$
(c) $C_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)^2$.

Indication : on pourra écrire (A_n) sous la forme $A_n = (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$ où (α_k) est une suite positive.

Pour s'entraîner, aller plus loin

Exercice 84. (♣)
(a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum \frac{k^n}{k!}$ est convergente.
(b) Pour tout entier $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. Notons $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.
- Etablir une relation de récurrence satisfaite par la suite (S_n).
- En déduire que $\frac{S_n}{e} \in \mathbb{N}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 85. Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente.

(a) Montrer que pour tout $p \geq 1$, la série $\sum (a_n)^p$ est convergente.

(b) Posons $S_p = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^p$. Calculer la limite de $(S_p)^{\frac{1}{p}}$ lorsque $p \to \infty$.

Exercice 86. On considère deux suites réelles (a_n) et (b_n). Posons $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

(a) (Transformation d'Abel[1]) Montrer que pour tous entiers naturels $N > M$, on a

$$\sum_{n=M+1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=M+1}^{N} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{N+1} B_N - a_{M+1} B_M.$$

(b) En déduire que $\sum a_n b_n$ est une série convergente si les conditions suivantes sont satisfaites
- la suite (B_n) est bornée,
- la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente,
- la suite (a_n) tend vers 0.

(c) En déduire que $\sum a_n b_n$ est une série convergente si la suite (B_n) est bornée et si (a_n) est une suite décroissante convergente vers 0.

(d) Montrer que la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ est convergente.

(e) Montrer que la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ n'est pas absolument convergente (*on pourra utiliser le fait que* $|\sin(x)| \geq \sin(x)^2$).

Exercice 87. (♠) On cherche à établir un développement asymptotique de la série harmonique

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \geq 1.$$

On pose $a_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, pour tout $k \geq 1$.

(a) Montrer que $a_k = \frac{1}{2k^2} + O(\frac{1}{k^3})$.

(b) En déduire que la série $\sum a_k$ converge. On note $\gamma := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(c) Montrer que le reste $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ admet le développement asymptotique :

$$R_n = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

(d) En déduire que la série harmonique admet le développement asymptotique suivant :

$$(\star) \qquad H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

Exercice 88. (♠) Considérons une suite réelle (x_n) formée de termes strictements positifs. On suppose que la suite $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$ admet le développement asymptotique suivant :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

(a) Montrer que la série $\sum \ln(\frac{x_{n+1}}{x_n}) - \frac{\alpha}{n}$ est convergente.

(b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on a : $x_n \sim C n^{\alpha}$. *On utilisera le fait que* $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, *voir* $(\star)$.

1. On notera la similitude avec l'intégration par parties des fonctions.