Examen Session 2
“Algèbre 1 - HAX708X”

11 juin 2025

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 3h00

Questions isolées *(8 points)*

a. Déterminer une base du $\mathbb{Z}$-module

$$N := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, x - y + z \in 4\mathbb{Z} \text{ et } 3x + y + 8z \in 10\mathbb{Z}\right\}.$$

b. On rappelle qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X] - \{0\}$ est dit *primitif* si $\mathrm{pgcd}(a_0, \ldots, a_n) = 1$. Montrer que le produit de deux polynômes primitifs est un polynôme primitif.

c. À $X \in M_n(\mathbb{Z})$, on associe le sous-module $\ker(X)$ de $\mathbb{Z}^n$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$. Vérifier que l'hypothèse « $\ker(A) = \ker(B)$ » n'est pas équivalente à « $\exists Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ tel que $A = QB$ ».

d. Soit V une représentation irréductible d'un groupe *abélien fini* G. Montrer que $\dim V = 1$.

e. Soit V une représentation complexe d'un groupe fini G, et χ_V son caractère. Montrer que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, $\forall g \in G$.

Exercice 4 *(6 points)*

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'anneau quotient $A_n := \mathbb{Z}[i]/(n)$ et l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$.

(1) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?

(2) Montrer que A_n est isomorphe au quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$.

(3) En déduire qu'un entier $n \geq 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si n est un nombre premier, et si -1 n'est pas un carré de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 3 *(8 points)*

Soit $\mathfrak{A}_5 \subset \mathfrak{S}_5$ le groupe alterné. On note $V_1 = \mathbb{C}$ la représentation triviale de $\mathfrak{A}_5$.

(1) Montrer que $\mathfrak{A}_5$ admet cinq classes de conjugaisons, celles de Id, (123), $(12)(34)$, (12345) et (12354). Dénombrer chacune des classes de conjugaisons.

(2) Soit χ_2 le caractère de la représentation de dimension 4 donnée par la permutation des coordonnées de l'hyperplan $V_2 = \{\sum_{i=1}^{5} x_i = 0\} \subset \mathbb{C}^5$. Calculer le caractère χ_2 et en déduire que V_2 est une représentation irréductible de $\mathfrak{A}_5$. *On pourra comparer le caractère χ_2 avec le caractère de la représentation standard* $\mathbb{C}^5$.

(3) Soit $W \subset \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré 2. Le groupe $\mathfrak{A}_5$ agit linéairement sur W par permutation des variables.

— Exhiber une base de W et calculer le caractère χ_W.

— Calculer les multiplicités des représentations irréductibles V_1 et V_2 dans W.

— Montrer que W possède une sous-représentation irréductible de dimension 5.

(4) Quelle est la dimension des autres représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{A}_5$?