Examen Session 1
"Algèbre 1 - HAX708X"

6 janvier 2025

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 3h00

Questions isolées *(9 points)*

a. Soit A un anneau principal. Démontrer que toute suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de A est stationnaire.

b. Soient $a, b \geq 1$: on note $a \wedge b$ leur pgcd. On considère l'idéal $I_{a,b} \subset \mathbb{Z}[X]$ engendré par aX et b et l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/I_{a,b}$.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[X]/I_{a,b} \simeq \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ si $a \wedge b = 1$.

(2) Expliciter un morphisme d'anneau $\mathbb{Z}[X]/I_{a,b} \to \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$ avec $\delta = \frac{b}{a \wedge b}$.

c. On rappelle qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X] - \{0\}$ est dit *primitif* si $\mathrm{pgcd}(a_0, \ldots, a_n) = 1$. Montrer que le produit de deux polynômes primitifs est un polynôme primitif.

d. À une matrice $X \in M_n(\mathbb{Z})$, on associe le sous-module $\mathrm{Im}(X) = X(\mathbb{Z}^n)$ de $\mathbb{Z}^n$.

(1) Pour $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$, montrer l'équivalence : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{Z})$ tel que $A = BP$.

(2) Montrer que $\mathbb{Z}^n/\mathrm{Im}(X)$ est fini si et seulement si $\det(X) \neq 0$ et qu'alors $\mathrm{Cardinal}(\mathbb{Z}^n/\mathrm{Im}(X)) = |\det(X)|$.

e. Déterminer une base du $\mathbb{Z}$-module $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, 12x - 15y + 10z \in 7\mathbb{Z}\}$.

Exercice 1 *(4 points)*

Soit A_7 l'ensemble des nombres rationnels qui s'écrivent comme une fraction $\frac{a}{b}$ avec b premier avec 7.

(1) Montrer que A_7 est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

(2) Déterminer ses éléments inversibles ainsi que ses éléments irréductibles.

(3) Montrer que A_7 est un anneau principal.

Tournez la page SVP

Exercice 2 *(9 points)*

Soit $p \geq 2$ un nombre premier. On note Γ_p le sous-groupe des bijections de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la forme

$$\begin{array}{rcl} \phi_{a,b} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & ax + b, \end{array}$$

où $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(1) Calculer les expressions : $\phi_{a,b}^{-1}$, $\phi_{c,1} \circ \phi_{a,b} \circ \phi_{c,1}^{-1}$, et $\phi_{1,d} \circ \phi_{a,b} \circ \phi_{1,d}^{-1}$.

(2) Montrer que Γ_p possède p classes de conjugaison.

(3) Montrer que Γ_p possède $p-1$ représentations irréductibles complexes de dimension 1. *On utilisera le morphisme de groupe $\phi_{a,b} \mapsto a$ et le fait que le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.*

Soit E l'espace vectoriel formé des fonctions $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. On considère l'action linéaire de Γ_p sur E définie par la relation

$$(\phi_{a,b} \cdot f)(x) = f(a^{-1}x - a^{-1}b).$$

On note $F \subset E$ le sous-espace vectoriel des fonctions f vérifiant $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} f(x) = 0$.

(4) Vérifier que F est une sous-représentation de E.

(5) Calculer les caractères χ_E et χ_F des représentations E et F.

(6) Montrer que F est une représentation irréductible de Γ_p.