Correction du CC du 15 décembre 2025
"Algèbre 1 - HAX708X"

Questions isolées

a. Soit $v_1 = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur non nul. Montrer que v_1 peut être complété en une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{Z}^n$ si et seulement si $pgcd(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Soit $\delta = pgcd(a_1, \ldots, a_n) \geq 1$. Pour n'importe quelle famille $\{v_2, \ldots, v_n\}$ de vecteurs $\mathbb{Z}^n$, le déterminant $\det(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}$ est divisible par δ. Si $\delta \neq 1$, alors $\det(v_1, \ldots, v_n) \neq \pm 1$, ce qui signifie que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ n'est pas une base de $\mathbb{Z}^n$.

Supposons que $\delta = 1$. Alors, il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i=1}^n u_i a_i = 1$. Considérons la forme linéaire $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n u_i x_i$. Comme $\varphi(v_1) = 1$ on a $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}v_1 \oplus \ker(\varphi)$. Le sous $\mathbb{Z}$-module $\ker(\varphi) \subset \mathbb{Z}^n$ possède une base $\{v_2, \ldots, v_n\}$. Alors $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est une base de $\mathbb{Z}^n$.

b. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module $G := (\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})$.

On a $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $80 = 2^4 \cdot 5$ et $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Prenons

$$n_1 = 2 \cdot 5, \quad n_2 = 2^2 \cdot 5, \quad n_3 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3^2.$$

Grâce au lemme chinois, on voit que G est isomorphe à

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n_3\mathbb{Z}).$$

On a montré que les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module G sont $n_1 \backslash n_2 \backslash n_3$.

c. Soit V une représentation irréductible complexe d'un groupe **abélien fini** G. Montrer que $\dim V = 1$.

Voir le cours.

Exercice 1

(1) Rappeler la définition des invariants de similitude d'un endomorphisme $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

Voir le cours.

(2) Dénombrer le nombre de classes de conjugaison dans $\mathfrak{X} := \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^6), A^3 = 0\}$.

Soit $P_1, \cdots P_r$ les invariants de similitude de $A \in \mathfrak{X}$: les P_i sont des polynômes unitaires de degré ≥ 1, et A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_r) \end{pmatrix},$$

où les $C(P_i)$ sont les matrices compagnon associées à P_i. Comme $A \in \mathfrak{X}$, le polynôme caractéristique de A est égal à

$$X^6 = P_1 \cdots P_r,$$

tandis que le polynôme minimal de A est égal à

$$X^\ell = P_r$$

avec $\ell \in \{1, 2, 3\}$.

On utilise maintenant les propriétés de divisibilité : $P_1 \backslash \cdots \backslash P_r$.

Premier cas $P_r = X$. Ici, la matrice A est nulle.

Second cas $P_r = X^2$. Ici, on a les possiblités suivantes
— $r = 5$, et $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = X$,
— $r = 4$, $P_1 = P_2 = X$ et $P_3 = X^2$,
— $r = 3$, et $P_1 = P_2 = X^2$.
Troisième cas $P_r = X^3$. Ici, on a les possiblités suivantes
— $r = 4$, et $P_1 = P_2 = P_3 = X$,
— $r = 3$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$,
— $r = 2$, et $P_1 = X^3$.
On a ainsi montré que $\mathfrak{X}$ possède 7 classes de conjugaison.

Exercice 2

Déterminer une base de chaque $\mathbb{Z}$-module :

(1) $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ 20x + 18y + 15z = 0\}$.

Comme $pgcd(20, 18, 15) = 1$, la relation $20x + 18y + 15z = 0$ impose que : $3 = pgcd(18, 15)$ divise x, $5 = pgcd(20, 15)$ divise y, et $2 = pgcd(20, 18)$ divise z.

On pose alors $x = 3x'$, $y = 5y'$ et $z = 2z'$. La relation $20x + 18y + 15z = 0$ devient $60x' + 90y' + 30z' = 0$, soit $z' = -2x' - 3y'$. On a ainsi montré que les éléments de M sont de la forme

$$(3x', 5y', 2(-2x' - 3y')) = x'V_1 + y'V_2$$

avec $V_1 = (3, 0, -4)$ et $V_2 = (0, 5, -6)$.

Conclusion : $\{V_1, V_2\}$ est une base de M.

(2) $N := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ 20x + 18y + 15z \in 100\mathbb{Z}\}$.

Posons $\varphi(x, y, z) = 20x + 18y + 15z$, et $V_3 = (-1, 2, 1)$. Comme $\varphi(V_3) = 1$, on a

$$\mathbb{Z}^3 = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{Z}V_3 = \mathbb{Z}V_1 \oplus \mathbb{Z}V_2 \oplus \mathbb{Z}V_3$$

et $N = \mathbb{Z}V_1 \oplus \mathbb{Z}V_2 \oplus \mathbb{Z}100V_3$.

Conclusion : $\{V_1, V_2, 100V_3\}$ est une base de N.

Exercice 3

On considère le groupe $G \subset GL_2(\mathbb{R})$ engendré par la rotation R d'angle $\frac{2\pi}{7}$ et la symétrie S définie par $S(x, y) = (x, -y)$.

(1) Déterminer les éléments du groupe G.

Les relations $S^2 = R^7 = Id$ et $SRS^{-1} = R^{-1}$ implique que

$$G = \left\{R^\ell, 0 \leq \ell \leq 6\right\} \bigcup \left\{SR^\ell, 0 \leq \ell \leq 6\right\}.$$

(2) Décrire le sous groupe dérivé $[G,G]$.

Notons $[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$ pour tout $a,b \in G$. On calcule

— $[R^\ell, R^{\ell'}] = Id$,
— $[SR^\ell, SR^{\ell'}] = R^{2(\ell-\ell')}$,
— $[SR^\ell, R^{\ell'}] = R^{-2\ell'}$

Comme l'ordre de R est 7, on voit que $[G,G] = \left\{R^\ell, 0 \le \ell \le 6\right\}$.

(3) Décrire les classes de conjugaison du groupe G.

Notons $< a >:= \{gag^{-1},\ g \in G\}$ la classe de conjugaison de $a \in G$. On a

— $< R^\ell >= \{R^\ell, R^{-\ell}\}$,
— $< SR^\ell >= \{SR^{-2k+\ell},\ 0 \le k \le 6\} \bigcup \{SR^{2k-\ell},\ 0 \le k \le 6\} = \{SR^\ell,\ 0 \le \ell \le 6\}$.

On a donc 5 classes de conjugaison dans G : $\{Id\}$, $\{R, R^{-1}\}$, $\{R^2, R^{-2}\}$, $\{R^3, R^{-3}\}$, et $\{SR^\ell,\ 0 \le \ell \le 6\}$.

(4) Déterminer les représentations irréductibles de G.

Le groupe G possède 5 représentations irréductibles complexes :

(a) la représentation triviale $V_1 = \mathbb{C}$.
(b) la représentation V_2 de dimension 1 associée au caractère $\chi : G \to \mathbb{C} - \{0\}$, défini par la relation $\chi(S^k R^\ell) = (-1)^k$.
(c) la représentation V_3 de dimension 2 associée au morphisme de groupe $\rho_1 : G \to GL(\mathbb{C}^2)$, défini par la relation
$$\rho_1(S^k R^\ell) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi\ell}{7}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{-2\pi\ell}{7}} \end{pmatrix}.$$
(d) la représentation V_4 de dimension 2 associée au morphisme de groupe $\rho_2 : G \to GL(\mathbb{C}^2)$, défini par la relation
$$\rho_2(S^k R^\ell) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi\ell}{7}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{-4\pi\ell}{7}} \end{pmatrix}.$$
(e) la représentation V_5 de dimension 2 associée au morphisme de groupe $\rho_3 : G \to GL(\mathbb{C}^2)$, défini par la relation
$$\rho_3(S^k R^\ell) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} e^{i\frac{6\pi\ell}{7}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{-6\pi\ell}{7}} \end{pmatrix}.$$