Contrôle Continu
“Algèbre 1 - HAX708X”

15 décembre 2025

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 1h30

Questions isolées *(6 points)*

a. Soit $v_1 = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur non nul. Montrer que v_1 peut être complété en une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{Z}^n$ si et seulement si $pgcd(a_1, \dots, a_n) = 1$.

b. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})$.

c. Soit V une représentation irréductible complexe d'un groupe **abélien fini** G. Montrer que $\dim V = 1$.

Exercice 1 *(4 points)*

(1) Rappeler la définition des invariants de similitude d'un endomorphisme $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

(2) Dénombrer le nombre de classes de conjugaison dans $\mathfrak{X} := \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^6), A^3 = 0\}$.

Exercice 2 *(4 points)*

Déterminer une base de chaque $\mathbb{Z}$-module :

(1) $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ 20x + 18y + 15z = 0\}$.

(2) $N := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ 20x + 18y + 15z \in 100\mathbb{Z}\}$.

Exercice 3 *(6 points)*

On considère le groupe $G \subset GL_2(\mathbb{R})$ engendré par la rotation R d'angle $\frac{2\pi}{7}$ et la symétrie S définie par $S(x, y) = (x, -y)$.

(1) Déterminer les éléments du groupe G.

(2) Décrire le sous groupe dérivé $[G, G]$.

(3) Décrire les classes de conjugaison du groupe G.

(4) Déterminer les représentations irréductibles de G.