CONTRÔLE CONTINU
"ALGÈBRE 1 - HAX708X"

21 OCTOBRE 2025

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 1h30

Questions isolées *(10 points)*

a. On rappelle qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X] - \{0\}$ est dit *primitif* si $\mathrm{pgcd}(a_0, \dots, a_n) = 1$. Montrer que le produit de deux polynômes primitifs est un polynôme primitif.

b. Dans l'anneau euclidien $\mathbb{Z}[i]$:

(1) Effectuer la division euclidienne de $8 + 5i$ par $2 + 3i$.

(2) Calculer le pgcd de $8 + 5i$ par $2 + 3i$.

c. On considère l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$, ainsi que le quotient $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps. Quel est son cardinal ?

d. Décrire tous les morphismes de groupes $\varphi : \mathbb{Z}/80\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$.

e. Est-ce que $\mathbb{Z}[X]$ possède un idéal qui n'est pas un $\mathbb{Z}[X]$-module libre ?

Exercice 1 *(4 points)*

(1) Déterminer la torsion du groupe abélien $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(2) Montrer que, $\forall n \geq 1$, il existe un unique sous-groupe cyclique de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ d'ordre n.

Exercice 2 *(6 points)*

Soit $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{19}\right)$. On note $\mathbb{Z}[\alpha]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par 1 et α.

(1) Déterminer un polynôme de degré 2 à coefficients entiers qui annule α. En déduire que tous les éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$ sont de la forme $x + y\alpha$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

(2) Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[\alpha] \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(3) Montrer que l'idéal engendré par 2 est maximal dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.