Méthodes en algèbre linéaire
SV concours (2017-2018)

23 novembre 2017

1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

► Pour montrer qu'un ensemble, muni de deux opérations (l'une interne, l'autre externe) est un espace vectoriel réel, on peut évidemment vérifier les 8 axiomes (= conditions) qui apparaissent dans la définition, et parfois c'est la seule méthode possible. Cependant, en pratique on est presque toujours dans le cas où l'ensemble en question est en fait un *sous-espace vectoriel* d'un espace vectoriel de référence (généralement $\mathbb{R}^n$, parfois $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou l'espace des suites réelles).

► Pour montrer qu'un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E, plusieurs méthodes sont envisageables selon le contexte :

Méthode 1. Vérifier les trois propriétés de la définition « sous-espace vectoriel » :

1. 0_E appartient à F ;
2. F est stable par addition ;
3. F est stable par multiplication scalaire.

Méthode 2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ pour certains vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ appartenant à E.

Méthode 3. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$: montrer que F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues.

Méthode 4. Montrer que F est le noyau d'une certaine application linéaire définie sur E (la méthode 3 en est un cas particulier).

Méthode 5. Montrer que F est l'image d'une certaine application linéaire à valeurs dans E (plus rarement).

► Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F, G d'un espace vectoriel E sont égaux, de manière très générale :

1. On peut montrer que $F \subset G$ et $G \subset F$ séparément (raisonnement par double inclusion). Le raisonnement pour montrer par exemple que $F \subset G$ prend le plus souvent la forme suivante : « soit $v \in F$, alors... [arguments]..., et donc $v \in G$. »

2. On peut aussi montrer que $F = G$ en raisonnant par équivalence (à chaque étape du raisonnement), sous la forme : « $v \in F$ équivaut à..., ce qui équivaut à..., [...], ce qui équivaut à $v \in G$. »
3. Si on sait déjà que F et G ont la même dimension, alors il suffit de montrer l'une de deux inclusions $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2 Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel, et soient $u_1, \dots, u_k$ des vecteurs de E.

► Pour prouver que $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$, on montre qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$ (c'est exactement la définition de « Vect »). Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, cette égalité se traduit par un système linéaire de n équations à k inconnues (système non homogène, sauf si $v = 0_E$, mais ce cas ne présente aucun intérêt) et il s'agit de montrer que se système est compatible.

► Si u_k est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_{k-1}$, alors :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Cette observation est utile pour « simplifier » une famille en continuant d'engendrer le même sous-espace vectoriel (voir la section « Bases »).

► Pour montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) \subset F$, où F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que chacun des u_i appartient à F.

► Pour montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_l)$, il suffit de montrer que chacun des u_i est combinaison linéaire de $v_1, \dots v_l$ (ce qui montre que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est contenu dans $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_l)$) et que chacun des v_j est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$ (ce qui montre l'inclusion réciproque). Des considérations de dimension peuvent permettre de ne faire que la moitié du travail

► Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est souvent présenté comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, ou comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs. Il faut savoir passer d'une description à l'autre.

1. Si F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, la résolution du système permet d'obtenir une base de F (voir la section « Bases »).
2. Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ avec $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ et que l'on souhaite déterminer un système linéaire homogène dont F est l'ensemble des solutions, on raisonne de la manière suivante :

   > Soit $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $v \in F$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$. On traduit cette égalité en un système linéaire Σ de n équations (les vecteurs ont n composantes) en k inconnues (les réels λ_i). On applique la méthode du pivot de Gauss pour résoudre ce système. Ceci fait apparaître une ou plusieurs équations

du type $0 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, qui forment un système linéaire homogène H. Si v vérifie H, alors le système Σ possède une solution, et donc $v \in F$. Si v ne vérifie par H, alors le système Σ ne possède pas de solution, et donc $v \notin F$. Par conséquent, $F = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ vérifie } H\}$.

3 Sommes, sommes directes, sous-espaces supplémentaires

3.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel, et soient F, G, H des sous-espaces vectoriels de E.

► Pour montrer que $F + G = H$, on peut raisonner par double inclusion :

— Pour montrer que $F + G \subset H$, il suffit de montrer que si $u \in F$ et $v \in G$, alors $u + v \in H$.

— Pour montrer que $H \subset F + G$, il suffit de montrer que tout vecteur $w \in H$ peut s'écrire sous la forme $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.

► Pour montrer que $F+G = E$ (l'espace tout entier), il suffit de montrer que $E \subset F+G$, puisque l'inclusion réciproque est automatique.

► Si on dispose d'informations sur les dimensions, il suffit souvent de ne démontrer qu'une inclusion pour conclure à l'égalité $F + G = H$.

3.2 Sous-espaces en somme directe

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

► Pour montrer que F et G sont en somme directe, on revient généralement à la définition : on considère un vecteur $u \in F \cap G$, et on montre que nécessairement $u = 0_E$.

Voir aussi le paragraphe suivant (sous-espaces supplémentaires), en particulier si on dispose d'information sur les dimensions.

3.3 Sous-espaces supplémentaires

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

► Pour montrer que $E = F \oplus G$, on peut envisager plusieurs méthodes selon le contexte :

Méthode 1. On revient à la définition : on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$.

Méthode 2. On montre que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Méthode 3. On prend une base $(u_1, \ldots, u_k)$ de F et une base $(v_1, \ldots, v_l)$ de G, et on montre que $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l)$ est une base de E.

Méthode 4. On montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Méthode 5. On montre que $F + G = E$ et que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

4 Familles génératrices, familles libres, bases, dimension

4.1 Familles génératrices

► Pour montrer qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots u_k)$ engendre un espace vectoriel E :

— D'abord on vérifie que tous les vecteurs $u_1, \dots, u_k$ appartiennent à E.

— Puis on montre que pour tout $v \in E$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k.$$

Lorsque E est $\mathbb{R}^n$ ou un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, cette égalité se traduit en un système de n équations à k inconnues dans lequel les composantes de v jouent le rôle de paramètres, et il s'agit de montrer que ce système admet au moins une solution quelles que soient les valeurs de ces paramètres.

Voir aussi le paragraphe « Bases ».

4.2 Familles libres

► Pour déterminer si une famille $(u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est libre ou liée, on cherche les nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$ (lorsque $E = \mathbb{R}^n$, cette égalité se traduit par un système linéaire homogène de n équations à k inconnues, que l'on résout).

— Si la seule solution est de prendre $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, alors la famille est libre.

— S'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$, alors la famille est liée.

► Pour une famille (u, v) constituée de deux vecteurs :

1. si les vecteurs sont colinéaires, alors la famille est liée ;
2. si les vecteurs ne sont pas colinéaires, alors la famille est libre.

4.3 Bases

Soit E un espace vectoriel.

► Pour montrer qu'une famille de vecteurs de E est une base de E, plusieurs méthodes :

Méthode 1. On montre que la famille est libre et qu'elle engendre E (c'est la définition de « base »).

Méthode 2. On montre que tout vecteur de E se décompose *de manière unique* comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Méthode 3. On montre que la famille est libre et qu'elle contient autant de vecteurs que la dimension de E.

Méthode 4. On montre que la famille engendre E et qu'elle contient autant de vecteurs que la dimension de E.

► Pour extraire une base d'une famille génératrice de E, on applique l'algorithme suivant :

1. On détermine si la famille est libre.
2. Si la famille est libre, c'est une base de E.
3. Si la famille n'est pas libre, alors l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres, et on peut l'enlever de la famille. La famille avec ce vecteur en moins continue d'engendrer E, et on recommence à l'étape 1 avec cette nouvelle famille.
4. Remarque : si l'on connaît la dimension de E, alors on sait d'avance combien de vecteurs on devra enlever.

► Pour compléter une famille libre en une base de E, on applique l'algorithme suivant :

1. On détermine si la famille engendre E.
2. Si la famille engendre E, c'est déjà une base de E (on n'a donc pas à la compléter).
3. Si la famille n'engendre pas E, alors il existe un vecteur de E qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille. On choisit un tel vecteur de E, que l'on rajoute à la famille. On obtient alors une famille avec un vecteur de plus, qui continue d'être libre, et on recommence à l'étape 1 avec cette nouvelle famille.
4. Remarque : si l'on connaît la dimension de E, alors on sait d'avance combien de vecteurs on devra rajouter.

5 Rang d'une famille de vecteurs

► Pour déterminer le rang d'une famille $(u_1, \dots u_k)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E :

Méthode 1. On cherche s'il existe des relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille, autrement dit on détermine les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$ (lorsque $E = \mathbb{R}^n$, cette égalité se traduit par un système linéaire homogène, que l'on résout). Si la famille est libre, alors son rang est k. Si elle n'est pas libre, alors l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres, on l'enlève de la famille, et on recommence : soit la famille résultante est libre (et alors son rang est $k-1$), soit l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres, etc.

En réalité, l'analyse attentive de la relation $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$ permet souvent de conclure en une seule étape : d'une part on peut enlever tels et tels vecteurs car ils sont combinaison linéaire de cette sous-famille, et d'autre part cette sous-famille est libre.

Méthode 2. On détermine les composantes de $u_1, \dots, u_k$ dans une base de E (souvent $E = \mathbb{R}^n$ avec la base canonique), on construit la matrice dont la i-ème colonne est consituée des composantses de u_i, et on détermine le rang de cette matrice (voir la section Matrices).

6 Applications linéaires

6.1 Linéarité

Soient E, F deux espaces vectoriels.

► Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire :

Méthode 1. Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ quels que soient les vecteurs $u, v \in E$ et les réels α, β.

Méthode 2. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, dire que l'on reconnaît la forme générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (chacune des p composante de $f(x)$ s'écrit comme combinaison linéaire des composantes de $x = (x_1, \ldots, x_n)$). Attention, cette deuxième « méthode » est plus une justification qu'une démonstration.

6.2 Modes de définition d'une application linéaire

► Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ sont connus. Pour déterminer l'image d'un vecteur quelconque $v \in E$:

1. On commence par décomposer v dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire que l'on détermine les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$;
2. Puis on écrit $f(v) = f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$.

► Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires. Pour montrer que $f = g$:

Méthode 1. Revenir à la définition, c'est à dire montrer directement que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

Méthode 2. Montrer que « f et g coïncident sur une base de E », c'est à dire montrer que pour une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (et en fait pour n'importe quelle base de E), on a $f(e_1) = g(e_1)$, $f(e_2) = g(e_2)$,..., $f(e_n) = g(e_n)$.

6.3 Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes

► Pour montrer que f est un endomorphisme, on revient simplement à la définition : l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques.

Parfois, montrer que f est un endomorphisme prend la forme suivante : on se donne une application f définie sur un espace vectoriel E, sans dire explicitement dans quel espace elle prend ses valeurs, et il s'agit alors de montrer que f prend bien ses valeurs dans E.

► Montrer que f est un isomorphisme, c'est montrer que f est bijective (on dit aussi inversible). Voir plus loin.

► Montrer que f est un automorphisme, c'est montrer que f est un endomorphisme bijectif.

6.4 Noyau et image. Théorème du rang

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

► Pour déterminer le noyau $\ker(f)$, on détermine l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = 0_F$. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, ceci revient à résoudre un système linéaire homogène de p équations à n inconnues, ce que l'on fait par la méthode du pivot de Gauss ; on obtient alors directement un base, et donc la dimension, de $\ker(f)$.

► Pour déterminer l'image $\mathrm{im}(f)$, la méthode la plus rapide est de prendre une base quelconque $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (lorsque $E = \mathbb{R}^n$, on prend le plus souvent la base canonique), et de dire que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{im}(f)$. Extraire une base de cette famille (voir plus heut) permet alors de déterminer la dimension de $\mathrm{im}(f)$.

Remarque : le théorème du rang permet souvent de simplifier les raisonnements. Par exemple : on commence par déterminer le noyau, on connaît donc sa dimension, le théorème du rang nous donne alors la dimension de l'image, on sait donc de combien de vecteurs sera constituée une base de l'image.

6.5 Injectivité, surjectvité

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

► Pour montrer que f est injective, on considère un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) = 0_F$, et on montre que nécessairement $u = 0_E$.

► Pour montrer que f est surjective en utilisant la définition, on montre que tout vecteur $v \in F$ possède un antécédent par f.

Penser aussi à utiliser les dimensions lorsque c'est possible : montrer que $\ker(f) = \{0_E\}$ revient à montrer que $\dim(\ker(f)) = 0$, et montrer que $\mathrm{im}(f) = F$ revient à montrer que $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim F$. Penser notamment au théorème du rang, qui relie la dimension du noyau et la dimension de l'image.

Lorsque $\dim(E) = \dim(F)$, en particulier lorsque $E = F$, il y a équivalence entre injectivité et surjectivité (conséquence du théorème du rang).

7 Matrices

7.1 Déterminant

Le déterminant d'une matrice, nécessairement *carrée*, est un nombre calculé à partir des coefficients de la matrice. Le programme du concours ne mentionne que le déterminant des matrices 2×2 et 3×3.

► Pour une matrice 2×2 :

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

► Pour une matrice 3×3 :

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfh + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Propriétés du déterminant

Les propriétés ci-dessous se vérifient facilement en utilisant les formules données pour les déterminants 2×2 et 3×3. Elles se généralisent aux matrices carrées de taille quelconque.

1. Le déterminant d'une matrice diagonale, et plus généralement d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est le produit des coefficients diagonaux de la matrice.
2. Le déterminant est multiplicatif : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour deux matrices carrées A, B de même taille [1].
3. Si A' est la matrice obtenue à partir de A en multipliant une ligne de A (ou une colonne de A) par un nombre λ, alors on a $\det(A') = \lambda \det(A)$. Par conséquent, puisque passer de A à λA revient à multiplier toutes les lignes (ou, de manière équivalente, toutes les colonnes) par λ, on a :

   $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A),$$

   où n est le nombre de lignes (et de colonnes) de A.
4. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul, et dans ce cas on a :

   $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

   En particulier : si la matrice carrée A possède une ligne (ou une colonne) nulle, ou si elle possède deux lignes (ou deux colonnes) identiques, ou plus généralement si ses lignes (ou ses colonnes) ne sont pas linéairement indépendantes, alors $\det(A) = 0$.
5. Une matrice et sa transposée ont le même déterminant :

   $$\det({}^tA) = \det(A).$$

7.2 Inversibilité

► Pour déterminer si une matrice carrée A de taille $n \times n$ est inversible, sans avoir nécessairement besoin de déterminer son inverse si elle est inversible, plusieurs méthodes sont envisageables ; la première est la plus simple pour de petites matrices, c'est donc celle-ci qui est à privilégier dans ce cas.

1. En revanche, le déterminant n'est pas additif : en général, on a $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Méthode 1. Si la matrice est de taille 2×2 ou 3×3 (et pour une taille quelconque $n \times n$ si on connaît la notion générale de déterminant), on calcule $\det(A)$ puis on conclut : si $\det(A) = 0$ la matrice n'est pas inversible, si $\det(A) = 0$ la matrice est inversible.

Méthode 2. On effectue des opérations élémentaires sur les lignes et/ou sur les colonnes de A, jusqu'à arriver à une matrice qui est clairement inversible (par exemple une matrice diagonale, ou plus généralement triangulaire, dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls) ou clairement non inversible (par exemple une matrice avec une ligne ou une colonne nulle, ou deux lignes ou deux colonnes identiques ou colinéaires, etc.) On conclut sur la matrice A (les opérations élémentaires ne modifient pas le rang de la matrice, donc ne modifient pas son caractère inversible ou non).

► Pour montrer qu'une matrice carrée A de taille $n \times n$ est inversible, et en même temps calculer son inverse A^{-1} :

Méthode 1. Déterminer explicitement une matrice carrée B, de même taille que A, telle que $AB = I_n$ (ou telle que $BA = I_n$).

Méthode 2. Résoudre le système linéaire $AX = Y$,où X et Y sont deux matrices colonne à n lignes :

1. Si le système possède une unique solution X pour chaque $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice A est inversible, et la solution unique s'écrit sous la forme $X = A^{-1}Y$, ce qui permet de déterminer A^{-1}.
2. S'il existe des vecteurs colonne $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ pour lesquels le système $AX = Y$ ne possède pas de solution, ou bien possède une infinité de solutions, alors la matrice A n'est pas inversible.

Méthode 3. Utiliser des opérations élémentaires, exclusivement sur les lignes de A ou exclusivement sur les colonnes de A, pour transformer A en la matrice identité I_n. Simultanément, effectuer les mêmes opérations en partant de la matrice I_n. La matrice obtenue à la fin est alors la matrice A^{-1}.

Méthode 4. Montrer que $\det(A) \neq 0$, puis utiliser la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\mathrm{com}(A),$$

où ${}^t\mathrm{com}(A)$ désigne la transposée de la comatrice de A. Pour les matrices 2×2, cette formule donne un résultat simple :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

7.3 Comment déterminer les puissances A^k d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$

Méthode 1. On calcule les premières puissances $A^2, A^3, \dots$, puis on conjecture la forme générale de A^k, puis on démontre cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Méthode 2. On diagonalise la matrice A (à condition qu'elle le soit !) Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, alors on commence par observer que
$$D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k),$$
puis que
$$A^k = PD^kP^{-1},$$
que l'on calcule alors explicitement.

7.4 Représentations matricielles

7.4.1 Représentation matricielle d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

On se donne un espace vectoriel E et une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

► Pour déterminer la matrice d'un vecteur $v \in E$ dans la base $\mathcal{B}$:

Méthode 1. On revient à la définition : on décompose v dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire que l'on détermine les nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, et on écrit :
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Méthode 2. Si on connaît déjà $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$ dans une autre base $\mathcal{B}'$ de E, et que l'on connaît également la matrice de passage $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, alors on a :
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \, \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v).$$

► Pour déterminer la matrice d'une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_k)$ dans la base $\mathcal{B}$: on décompose chaque vecteur v_i comme ci-dessus, et on écrit
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1), \ldots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_k)),$$
en « oubliant » les parenthèses autour des matrices colonne $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1), \ldots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_k)$.

7.4.2 Matrice de passage d'une base à une autre base

On se donne un espace vectoriel E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E.

► Pour déterminer la matrice de passage P (la matrice de changement de base) de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, on écrit simplement
$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n).$$
Cette matrice est également notée $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Pour la déterminer, il faut donc savoir décomposer les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

► Si on connaît déjà la matrice de passage en sens inverse, on utilise la relation :
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})^{-1}.$$

7.4.3 Matrice d'une application linéaire dans des bases

On considère une application linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels, et on se donne une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F.

► Pour déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, deux méthodes selon le contexte :

Méthode 1. On revient à la définition :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(v_1), \ldots, f(v_n)).$$

Pour la déterminer, il faut donc : (1) décomposer dans la base $\mathcal{C}$ chacune des images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$; (2) écrire en colonne les décomposition ainsi trouvées ; (3) construire une matrice avec autant de colonnes qu'il y a de vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.

Méthode 2. Si on connaît déjà $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f)$ pour d'autres bases $\mathcal{B}'$ (de E) et $\mathcal{C}'$ (de F), on utilise la formule de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).$$

8 Réduction

8.1 Introduction

La réduction est une notion qui s'applique aux endomorphismes et aux matrices.

► Soient E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}$ un endomorphisme de E. **Réduire** f, c'est trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit « la plus simple possible ».

► Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. **Réduire** A, c'est trouver une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit « la plus simple possible ».

8.2 Comment déterminer les valeurs propres

► Pour vérifier qu'un nombre réel *donné* λ est une valeur propre de f (respectivement de A), il suffit de trouver un vecteur v non nul (respectivement un vecteur colonne X non nul) tel que $f(v) = \lambda v$ (respectivement tel que $AX = \lambda X$).

► Pour rechercher toutes les valeurs propres de f, on écrit d'abord la matrice A de f dans une base quelconque (le plus souvent, soit l'espace vectoriel est $\mathbb{R}^n$ et on prend la base canonique, soit f est directement donné par sa matrice). Puis on considère la matrice $A - \lambda I_n$, où λ est une variable réelle. Il s'agit alors de déterminer les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Méthode 1 (par le rang). On effectue des opérations élémentaires sur les lignes et/ou sur les colonnes de $A - \lambda I_n$ dans le but de la simplifier afin de déterminer les valeurs de λ pour lesquelle la matrice n'est pas de rang n (on rappelle que les opérations élémentaires préservent le rang). On s'attend donc à devoir « discuter selon la valeur de λ » :

1. si λ est tel ou tel réel, alors la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ;
2. si λ est différent des réels précédents, alors la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible.

Méthode 2 (par le polynôme caractéristique). En dimension 2 et 3, on peut calculer le polynôme caractéristique de f (ou de A), défini par $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Les valeurs propres de f (ou de A) sont alors exactement les racines de $P(\lambda)$. Celui-ci est un polynôme de degré $n = 2$ ou 3. La recherche des racines est bien connue lorsque $n = 2$. Lorsque $n = 3$, on commence par chercher une racine évidente λ_0, puis on factorise par $\lambda - \lambda_0$, c'est à dire que l'on écrit $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)Q(\lambda)$, où $Q(\lambda)$ est un polynôme (à déterminer) de degré 2, dont on calcule ensuite les racines.

8.3 Comment déterminer les sous-espaces propres

Pour chaque valeur propre λ, on détermine les vecteurs v (respectivement les vecteurs colonnes X) tels que $f(v) = \lambda v$ (respectivement tels que $AX = \lambda X$). Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ (le cas le plus fréquent), ceci revient à résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues.

8.4 Diagonalisation (version endomorphismes)

On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

► Pour montrer que f est diagonalisable, il suffit de montrer que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace tout entier (voir aussi la section 8.6).

► Pour trouver une base de vecteurs propres (en supposant que f est diagonalisable), on détermine une base de chaque sous-espace propre et on « réunit » ces bases en une famille de vecteurs de E ; il y a alors dans cette famille autant de vecteurs que la dimension de E, cette famille est automatiquement libre, c'est donc une base de E (voir la section 8.6).

8.5 Diagonalisation (version matrices)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

► Pour montrer que A est diagonalisable, il suffit de montrer que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n (voir 8.4 et 8.6).

► Pour déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (en supposant que A est diagonalisable), on procède comme dans le cas « endomorphisme » et on construit la matrice de passage P de la base canonique à la base constituée des vecteurs propres. Concrètement, on écrit « en colonnes » les vecteurs propres qui forment une base de $\mathbb{R}^n$, et on réunit ces colonnes en une matrice que l'on note P.

8.6 Les théorèmes de réduction explicitement au programme

Plusieurs résultats sont explicitement mentionnés dans le programme du concours. Ils sont exprimés en termes de matrices, mais ils s'appliquent aussi aux endomorphismes.

Théorème 1. *Toute matrice carrée à coefficients réels admet au moins une valeur propre complexe.*

En effet, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, et le théorème de D'Alembert-Gauss assure que « tout polynôme à coefficients réels (ou complexes) admet une racine complexe ». En pratique, dans le cadre du concours :

1. Une matrice 2×2 a un polynôme caractéristique de degré 2. On sait qu'un tel polynôme possède ou bien deux racines réelles, ou bien une racine réelle double, ou bien deux racines complexes conjuguées.
2. Une matrice 3×3 a un polynôme caractéristique de degré 3. Tout polynôme réel de degré 3 (plus généralement de degré impair) possède au moins une racine réelle (considérer les limites en $\pm\infty$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires), dont toute matrice réelle 3×3 possède au moins une valeur propre réelle.

Théorème 2. *Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Plus précisément, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des valeurs propres de f deux à deux distinctes, et si $v_1, \ldots, v_k$ sont des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, alors la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est libre. Ce résultat est la traduction du fait que les sous-espaces propres sont en somme directe.

Théorème 3. *Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Plus précisément, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des valeurs propres de f deux à deux distinctes, et si $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ sont des bases respectives de $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$, alors la famille $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ est libre. Ce résultat est une extension du précédent (dans lequel on choisissait *un* vecteur dans chaque sous-espace propre).

Théorème 4. *En dimension trois, une matrice ayant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

Ce résultat est en fait vrai en toute dimension, y compris en dimension 2 (l'autre dimension du programme du concours). Il est conséquence du théorème 2 ci-dessus : s'il y a n valeurs propres distinctes, alors y a n sous-espace propres distincts ; si on choisit un vecteur dans chaque sous-espace propre, on obtient alors n vecteurs qui forment une famille libre (théorème 2), donc qui forment une base (puisque l'espace total est de dimension n. On a alors une base de vecteurs propres, ce qui signifie que la matrice (ou l'endomorphisme) est diagonalisable.

Ce théorème est important, car il permet d'affirmer que la matrice est diagonalisable sans avoir besoin de déterminer les sous-espaces propres.

Attention ! Il s'agit d'une condition suffisante de diagonalisabilité, mais pas d'une condition nécessaire.

Théorème 5. *Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de la matrice.*

Ce résultat est une conséquence directe du théorème 3.

Théorème 6. *Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable.*

Il s'agit d'un résultat utile, dont la démonstration est hors-programme.