Feuille TD 5 : Regression linéaire et Equations différentielles

Regression linéaire

Exercice 1. (QCM)

1) Réponse (b). En effet les points sont alignés car les erreurs sont égales à zéro.

2) Réponse (a). La relation $b = \bar{y} - m\bar{x}$ montre que la droite MC passe par le centre de gravité du nuage $(\bar{x}, \bar{y})$.

Exercice 2. On rappelle que $m = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}, b = \overline{y} - m\overline{x}$ avec $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ et $cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$.

(a) On a $\bar{x} = 2,9$ mg et $\bar{y} = 0,187$ et

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1.0	0.060	-1,9	3,61	-0,127	0,01061	0,2413
2.0	0.140	-0,9	0,81	-0,047	0,0022	0,0423
3.3	0.217	0,4	0,16	0,030	0,0009	0,012
5.3	0.331	2,4	5,76	0,144	0,0207	0,3456

Donc $\sigma_x^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{10,34}{4}$ et $cov(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{0,6412}{4}$. On en déduit que la pente $m = 0,6412/10,34 = 0,062$ et l'ordonnée à l'origine $b = 0,187 - (0,062 \times 2,9) = 0,0072$.

L'équation de la droite de régression est $y = 0,062x + 0,0072$.

b) Si $y = 0,250$ on trouve que la concentration $x = 3,92$ mg

c) En utilisant

$$R = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{(\sum(x_i - \bar{x})^2)(\sum(y_i - \bar{y})^2)}}.$$

On trouve $R = \frac{0,6412}{\sqrt{10,34 \times 0,04}} = 0,9970$

Conclusion. On peut faire confiance à notre approche car R est très proche de 1.

Equations différentielles

Exercice 1.

(a) $\begin{cases} y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 3t + 2 \quad \text{(pour } t > 0) \\ y(1) = 3 \end{cases}$

L'équation homogène associée est $y'(t) + \frac{1}{t}(y) = 0$ (c-à-d, $y'(t) = -\frac{1}{t}(y)$) dont les solutions sont les fonctions du type

$$y(t) = C \exp\left(\int -\frac{1}{t} dt\right) = C \exp(-\ln t) = C \exp \ln(t^{-1}) = C\frac{1}{t} \quad C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière $y_0(t)$ de $y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 3t + 2$ sous la forme

$$y_0 = c(t)\frac{1}{t}$$

On remplace ceci dans l'équation $y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 3t + 2$

$$\frac{c'(t)}{t} + c(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{t}\frac{c(t)}{t} = 3t + 2$$

d'où $\frac{c'(t)}{t} = 3t + 2$ et donc $c'(t) = 3t^2 + 2t$. En intégrant, en obtient

$$c(t) = \int (3t^2 + 2t)\ dt = t^3 + t^2 + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

En prenant $k = 0$, on trouve

$$y_0(t) = \frac{1}{t}c(t) = \frac{t^3 + t^2}{t} = t^2 + t.$$

Donc, toutes les solutions générales sont $y(t) = t^2 + t + \frac{C}{t}$. Pour $t = 1$ on obtient $3 = 1^2 + 1 + \frac{C}{1}$ impliquant $C = 1$. Donc la solution générale pour cette système est

$$y(t) = t^2 + t + \frac{1}{t} \quad \text{pour tout } t.$$

b) $\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = e^{5t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

L'équation homogène associée est $y'(t) - 2y(t) = 0$ (c-à-d, $y'(t) = 2y(t)$) dont les solutions sont les fonctions du type

$$y(t) = Ce^{\int 2dt} = Ce^{2t} \quad C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière $y_0(t)$ de $y'(t) - 2y(t) = e^{5t}$ sous la forme

$$y_0 = c(t)e^{2t}$$

On remplace ceci dans l'équation $y'(t) - 2y(t) = e^{5t}$

$$c(t)2e^{2t} + e^{2t}c'(t) - 2c(t)e^{2t} = e^{5t}$$

d'où $e^{2t}c'(t) = e^{5t}$ ou encore $c'(t) = e^{3t}$. En intégrant, en obtient

$$c(t) = \int e^{3t}\, dt = \frac{1}{3}e^{3t} + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

En prenant $k = 0$, on trouve

$$y_0(t) = \frac{1}{3}e^{3t} \cdot e^{2t} = \frac{1}{3}e^{5t}$$

Donc, toutes les solutions générales sont $y(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + Ce^{2t}$. Pour $t = 1$ on obtient $1 = \frac{1}{3}e^0 + Ce^0$ impliquant $C = \frac{2}{3}$. Donc la solution générale pour cette système est

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{2t}.$$

c) $\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

L'équation homogène associée est $y'(t) - 2y(t) = 0$ (c-à-d, $y'(t) = 2y(t)$) dont les solutions sont les fonctions du type

$$y(t) = Ce^{\int 2dt} = Ce^{2t} \quad C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière $y_0(t)$ de $y'(t) - 2y(t) = e^{2t}$ sous la forme

$$y_0 = c(t)e^{2t}$$

On remplace ceci dans l'équation $y'(t) - 2y(t) = e^{2t}$

$$c(t)2e^{2t} + e^{2t}c'(t) - 2c(t)e^{2t} = e^{2t}$$

d'où $e^{2t}c'(t) = e^{2t}$ ou encore $c'(t) = 1$. En intégrant, en obtient

$$c(t) = \int dt = t + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

En prenant $k = 0$, on trouve

$$y_0(t) = te^{2t}$$

Donc, toutes les solutions générales sont $y(t) = te^{2t} + Ce^{2t}$. Pour $t = 1$ on obtient $1 = 0e^0 + Ce^0$ impliquant $C = 1$. Donc la solution générale pour cette système est

$$y(t) = te^{2t} + e^{2t} = e^{2t}(t + 1).$$

Exercice 2.

a) Nous avons $v = k$ où $k > 0$ est une constante et $v(t) = -a'(t)$. Alors, pour tout $t \geq 0,\ a'(t) = -v(t) = -k$ et en intégrant on a

$$a(t) = -kt + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

En $t = 0$, on a $a(0) = a_0$ donc $K = a_0$ d'où

$$a(t) = -kt + a_0.$$

Maintenant, $\theta_{1/2}$ est déterminé par l'équation $a(\theta_{1/2}) = \frac{a_0}{2}$, c-à-d,

$$-\theta_{1/2}k + a_0 = \frac{a_0}{2}$$

Donc, $\theta_{1/2} = \frac{a_0}{2k}$.

b) Nous avons $v = k$ où $k > 0$ est une constante et $v(t) = -a'(t)$. Alors, pour tout $t \geq 0,\ a'(t) = -v(t) = -ka(t)$ $a(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène $a'(t) + ka(t) = 0$ dont les solutions sont les fonctions qui s'écrivent

$$a(t) = Ce^{-kt} \ C \in \mathbb{R}$$

En $t = 0,\ a_0 = a(0)$ donc $a_0 = Ce^0 = C$ donc

$$a(t) = a_0 e^{-kt}$$

Maintenant, $\theta_{1/2}$ est déterminé par l'équation $a(\theta_{1/2}) = \frac{a_0}{2}$, c-à-d,

$$a_0 e^{-k\theta_{1/2}} = \frac{a_0}{2}$$

et donc $e^{-k\theta_{1/2}} = \frac{1}{2}$ ou encore $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k\theta_{1/2}$ ou bien $-\ln 2 = -k\theta_{1/2}$ et donc

$$\theta_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}.$$

Exercice 3.

a) $\begin{cases} y'(t) + ty(t) = 2t \\ y(0) = 1 \end{cases}$

L'équation homogène associée est $y'(t) + ty(t) = 0$ (c-à-d, $y'(t) = -ty(t)$) dont les solutions sont les fonctions du type

$$y(t) = Ce^{-\int t dt} = Ce^{-t^2/2} \quad C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière $y_0(t)$ de $y'(t) + ty(t) = 2t$ sous la forme

$$y_0 = c(t)e^{-t^2/2}$$

On remarque que $y_0(t) = 2$ est une solution évidente de $y'(t) + ty(t) = 2t$.

Donc, toutes les solutions générales sont $y(t) = 2 + Ce^{-t^2/2}$. Pour $t = 0$ on obtient $1 = 2 + Ce^0$ impliquant $c = -1$. Donc la solution générale pour cette système est

$$y(t) = 2 - e^{t^2/2}.$$

b) $\begin{cases} y'(t) + \cos(t)y(t) = \cos(t) \\ y(1) = 4 \end{cases}$

L'équation homogène associée est $y'(t) + \cos t y(t) = 0$ (c-à-d, $y'(t) = -\cos t y(t)$) dont les solutions sont les fonctions du type

$$y(t) = Ce^{-\int \cos t dt} = Ce^{-\sin t} \quad C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière $y_0(t)$ de $y'(t) + \cos t y(t) = \cos t$ sous la forme

$$y_0(t) = c(t)e^{-\sin t}$$

On remarque que $y_0(t) = 1$ est une solution évidente de $y'(t) + \cos t y(t) = \cos t$.

Donc, toutes les solutions générales sont $y(t) = 1 + Ce^{-\sin t}$. Pour $t = 1$ on obtient $4 = 1 + Ce^{-\sin 1}$ impliquant $c = 3e^{\sin 1}$. Donc la solution générale pour cette système est

$$y(t) = 1 + 3e^{\sin 1}e^{-\sin t} = 1 + 3e^{\sin 1 - \sin t}.$$

c) $\begin{cases} y'(t) + \frac{2}{1+t}y(t) = t^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

L'équation homogène associée est $y'(t) + \frac{2}{1+t}y(t) = 0$ (c-à-d, $y'(t) = -\frac{2}{1+t}y(t)$) dont les solutions sont les fonctions du type

$$y(t) = Ce^{-\int \frac{2}{1+t}dt} = Ce^{-2\ln(t+1)} = Ce^{\ln(t+1)^{-2}} = C(1+t)^{-2} \quad C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière $y_0(t)$ de $y'(t) + \frac{2}{1+t}y(t) = t^3$ sous la forme

$$y_0 = c(t)(1+t)^{-2}$$

On remplace ceci dans l'équation $y'(t) + \frac{2}{1+t}y(t) = t^3$

$$\frac{c'(t)}{(1+t)^2} + c(t)\left(\frac{-2}{(1+t)^3})\right) + \frac{2}{1+t} \cdot \frac{c(t)}{(1+t)^3} = t^3$$

d'où $\frac{c'(t)}{(1+t)^2} = t^3$ ou encore $c'(t) = t^3(1+t)^2 = t^3 + 2t^4 + t^5$. En intégrant, en obtient

$$c(t) = \int t^3 + 2t^4 + t^5 dt = \frac{t^4}{4} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^6}{6} + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

En prenant $k = 0$, on trouve

$$y_0(t) = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^6}{6}\right)\frac{1}{(1+t)^2}$$

Donc, toutes les solutions générales sont

$$y(t) = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^6}{6}\right)\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^2}.$$

Pour $t = 0$ on obtient $0 = 0 + \frac{C}{1+0}$ impliquant $C = 0$. Donc la solution générale pour cette système est

$$y(t) = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^6}{6}\right)\frac{1}{(1+t)^2}.$$