



Licence 2 - 2017/2018

HLMA304 : Arithmétique

Thierry Mignon

Octobre 2017

Contrôle continu

Durée : 1h30 – Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1. (cours)

- (1) Soit G un sous groupe de \mathbb{Z} . Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $G = d\mathbb{Z}$.
- (2) Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$; on rappelle que le pgcd de (a, b) est un entier naturel, défini comme le plus grand diviseur commun à a et b pour l'ordre de la divisibilité.
Montrer que $\text{pgcd}(a, b)$ est le générateur positif du sous-groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\text{pgcd}(n^2 + 1, n^4 + 1) \in \{1, 2\}$. Donner un exemple pour chacune de ces deux valeurs.

Exercice 3. Démontrer que $\log_{10} 2$ est irrationnel.

Indication : On rappelle que $\log_{10} 2 = \frac{\ln(2)}{\ln(10)}$. Procéder par l'absurde, en supposant qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$. Utiliser la décomposition en facteurs premiers.

Exercice 4. On considère, dans le plan \mathbb{R}^2 , la droite (D) d'équation :

$$54x + 42y = 276.$$

- (1) Trouver l'ensemble $E \subset \mathbb{Z}^2$ des couples d'entiers (x, y) appartenant à (D) .
- (2) Représenter graphiquement (D) et quelques points de E .
- (3) Déterminer le point de E le plus proche de l'origine pour la norme usuelle ($\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\text{ppcm}(1, 2, \dots, 2n) = \text{ppcm}(n + 1, n + 2, \dots, 2n)$$

Indication : Procéder par récurrence.