Licence 2 - 2017/2018

HLMA304 : Arithmétique

Thierry Mignon

Octobre 2017

Contrôle continu

Durée : 1h30 – Documents, calculatrices et téléphones interdits

Commentaire : Un(e) étudiant(e) ayant rédigé correctement les exercices 1, 2, 3, *la question* 1) *de l'exercice* 4 *et l'initialisation de la récurrence de l'exercice* 5 *obtenait* $17,5/20$.

Exercice 1. (cours - sur 5 points)

(1) Soit G un sous groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $G = d\mathbb{Z}$.

(2) Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$; on rappelle que le pgcd de (a,b) est un entier naturel, défini comme le plus grand diviseur commun à a et b pour l'ordre de la divisibilité.

Montrer que $\text{pgcd}(a,b)$ est le générateur positif du sous-groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\text{pgcd}(n^2+1, n^4+1) \in \{1,2\}$. Donner un exemple pour chacune de ces deux valeurs.

Correction : On peut –par exemple– effectuer une division euclidienne du polynôme X^4+1 par X^2+1 ; on obtient $(X^4+1) = (X^2-1).(X^2+1)+2$ ce qui, en remplaçant l'indéterminée X par l'entier n fourni l'égalité dans $\mathbb{Z}$:

$$(n^4+1) = (n^2-1).(n^2+1)+2$$

D'après une propriété du cours, ceci nous donne l'égalité : $\text{pgcd}(n^4+1, n^2+1) = \text{pgcd}(n^2+1, 2)$.
Si n est pair, n^2+1 est impair, donc $\text{pgcd}(n^4+1, n^2+1) = \text{pgcd}(n^2+1, 2) = 1$.
Si n est impair, n^2+1 est pair, donc $\text{pgcd}(n^4+1, n^2+1) = \text{pgcd}(n^2+1, 2) = 2$.

Par exemple, pour $n=1$, $\text{pgcd}(n^4+1, n^2+1) = \text{pgcd}(2,2) = 2$, et pour $n=2$, $\text{pgcd}(n^4+1, n^2+1) = \text{pgcd}(17,5) = 1$.

Exercice 3. Démontrer que $\log_{10} 2$ est irrationnel.

Indication : On rappelle que $\log_{10} 2 = \frac{\ln(2)}{\ln(10)}$. Procéder par l'absurde, en supposant qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$. Utiliser la décomposition en facteurs premiers.

Correction : Utilisons les notations de l'indication ; on obtient :

$$\begin{aligned}\log_{10} 2 = \frac{p}{q} \iff \frac{\ln(10)}{\ln(2)} = \frac{p}{q} \iff q\ln(10) = p\ln(2) \\ \iff \ln(10^q) = \ln(2^p) \iff 2^q.5^q = 2^p.5^0\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers, on a donc $q = p$ et $q = 0$, ce qui est impossible car $q \neq 0$.

Exercice 4. On considère, dans le plan $\mathbb{R}^2$, la droite (D) d'équation :

$$54x + 42y = 276.$$

(1) Trouver l'ensemble $E \subset \mathbb{Z}^2$ des couples d'entiers (x, y) appartenant à (D).

Correction : Puisque $54 = 2.3^3$ et $42 = 2.3.6$, $\text{pgcd}(54, 42) = 6$. Puisque 6 divise 276, l'équation possède des solutions entières. En divisant l'égalité par 6, on obtient l'équation équivalente suivante :

$$9x + 7y = 46.$$

Appliquons l'algorithme d'Euclide étendu à 9 et 7 :

$$\begin{aligned} 9 &= 1.7 + 2{,}7 = 3.2 + 1 \\ 1 &= 7 - 3.2 = 7 - 3.(9 - 7) = 4.7 - 3.9 \end{aligned}$$

En multipliant cette dernière égalité par 46, on obtient :

$$(-138).9 + (184).7 = 46$$

Le couple $(x_0, y_0) = (-138, 184)$ est donc une solution particulière de l'équation.
Soit (x, y) une autre solution. On a : $9x + 7y = 46$ et $9x_0 + 7y_0 = 46$. En soustrayant ces deux égalités, on obtient : $9(x - x_0) = 7(y_0 - y)$. En appliquant le lemme de Gauss, on voit que 7 divise $(x - x0)$. Il existe donc k tel que $(x - x_0) = 7k$, et par suite, $9k = (y_0 - y)$.
Ainsi, toute solution (x, y) est de la forme $(x_0 + 7k, y_0 - 9k)$. On vérifie que ces couples sont tous des solutions.
On obtient :

$$E = \{(-138 + 7k, 184 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

(1) Représenter graphiquement (D) et quelques points de E.

Correction : On peut, par exemple, placer les points correspondants à $k = 20$ et $k = 21$ (*cf.* question suivante) qui sont :

$$\begin{aligned}(-138 + 7.20, 184 - 9.20) = (-138 + 140, 184 - 180)) = (2, 4) \\ (-138 + 7.21, 184 - 9.21) = (-138 + 140 + 7, 184 - 180 - 9)) = (9, -5)\end{aligned}$$

La droite D est la droite passant par ces deux points.

(1) Déterminer le point de E le plus proche de l'origine pour la norme usuelle ($\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$).

CORRECTION : On cherche pour quel entier relatif k le minimum de $(x_0+7k)^2+(y_0-9k)^2$ est atteint. On a :

$$\begin{aligned}(x_0+7k)^2+(y_0-9k)^2 =& (x_0^2+2x_0.7k+7^2k^2)+(y_0^2-2.y_0.9k+9^2k^2)\\ =& (x_0^2+y_0^2)+(14x_0k+49k^2)+(-18y_0k+81k^2)\\ =& (x_0^2+y_0^2)+2k((7x_0-9y_0)+65k)\end{aligned}$$

L'entier k recherché est donc celui qui minimise :

$$k((7x_0-9y_0)+65k) = k((7.(-138)-9.(184))+65k) = k(-2622+65k)$$

La fonction $f(x) = x(-2622+65x)$ se dérive en $-2622+130x$. Elle atteint son minimum en $2622/130$ et est décroissante avant et croissante après. La division euclidienne de 2622 par 130 donne : $2622 = 20.130+22$. Donc $\frac{2622}{130} = 20+\frac{22}{130}$. Les entiers encadrant cette valeurs sont donc 20 et 21.
Pour $k=20$, on obtient :

$$f(20) = (20).(-2622+65.20) = (20).(-2622+1300) = -20.(1322) = -26440$$

Pour $k=21$, on obtient :

$$f(21) = (21).(-2622+65.21) = (20).(-2622+65.20+65) = -26397$$

Le minimum est donc atteint pour $k=20$, ce qui correspond au point

$$(x_1,y_1) = (-138+7.20, 184-9.20) = (-138+140, 184-180)) = (2,4)$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\text{ppcm}(1,2,\dots,2n) = \text{ppcm}(n+1,n+2,\dots,2n)$$

Indication : Procéder par récurrence.

CORRECTION : Pour $n=1$, on obtient $\text{ppcm}(1,2) = \text{ppcm}(2)$; c'est donc correct.
Supposons la propriété vraie au rang n. Au rang $(n+1)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\text{ppcm}(1,2,\dots,2n,2n+1,2(n+1)) &= \text{ppcm}(\text{ppcm}(1,2,\dots,2n),2n+1,2(n+1))\\ &= \text{ppcm}(\text{ppcm}(n+1,n+2,\dots,2n),2n+1,2(n+1))\\ &= \text{ppcm}(n+1,n+2,\dots,2n,2n+1,2(n+1))\\ &= \text{ppcm}(n+2,\dots,2n,2n+1,\text{ppcm}((n+1),2(n+1)))\end{aligned}$$

Or le ppcm de $(n+1)$ et $2(n+1)$ vaut bien $2(n+1)$. On obtient bien :

$$\text{ppcm}(1,2,\dots,2n,2n+1,2(n+1)) = \text{ppcm}((n+1)+1,\dots,2(n+1)).$$