

HAC310X Mathématiques pour la Chimie
Contrôle continu n°1

NOM :
Prénom :
Groupe :

Durée : 1h ; calculatrice non autorisée, aucun document autorisé.
Merci de répondre sur le sujet dans les cadres prévus à cet effet.

Exercice 1 [Calcul vectoriel].

- (1) (a) Soient $u = (-1, 1, -2)$ et $v = (1, 2, -1)$. Trouver l'angle entre les vecteurs u et v .
(2) (b) Trouver un vecteur orthogonal à u et v .

$$a) u \cdot v = (-1, 1, -2) \cdot (1, 2, -1) = -1 + 2 + 2 = 3$$

$$\|u\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad \|v\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\text{Donc, } 3 = \sqrt{6}\sqrt{6} \cos(\hat{u}\hat{v}) = 6 \cos(\hat{u}\hat{v})$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos(\hat{u}\hat{v}) \Leftrightarrow \hat{u}\hat{v} = \pi/3$$

$$b) w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= i(-1+4) - j(1+2) + k(-2-1) = 3i - 3j - 3k$$

$$\text{Donc } w = (3, -3, -3)$$

Exercice 2 [Matrice]. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- (1+2) (a) A est-elle inversible ? Si c'est le cas, calculer son inverse.
(1) (b) A est-elle orthogonale ?

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A^t$$

donc A n'est pas orthogonale

Exercice 3 [Valeurs et vecteurs propres]. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (3) (a) Trouver les valeurs propres de A .
 (3) (b) Déterminer les vecteurs propres correspondants (c-à-d, les solutions avec chaque valeur propre).

$$\begin{aligned}
 a) \quad \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda+1) + (1+2-\lambda) \\
 &= (2-\lambda)^3 - 2 + \lambda + 2 + \lambda - 1 + 1 + 2 - \lambda \\
 &= (2-\lambda)^3 + \lambda - 2 = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) \\
 &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1) \\
 &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) \\
 &= -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres
sont $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$

b) Pour $\lambda_1=1$, on trouve le système

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+2z=0 \\ y=-z \end{cases} \text{ donc } x+(-z)+z=0 \Rightarrow x=0$$

$Sol^{us} (0, -z, z)$

Pour $\lambda_2=2$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-x \end{cases} \text{ et } x+z=0 \Rightarrow x=-z$$

$Sol^{us} (-z, -z, z)$

Pour $\lambda_3=3$

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow 2z=0 \Rightarrow z=0 \text{ donc } -x+y+0=0 \Rightarrow x=y$$

$Sol^{us} (x, x, 0)$

Exercice 4 [Nombres complexes].

- (2) (a) Mettre sous la forme $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) le nombre $(\frac{1+i}{2-i})^2$.
 (2) (b) Trouver sous formes cartésiennes les racines carrées de i .
 (2) (c) Donner les solutions sous forme polaire.
 (1) (d) Désignons par z_1 et z_2 les deux racines carrées de i . Est-il vrai que $z_1 + z_2 = 0$?

$$a) \frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{1+3i}{5} \text{ . Donc } \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$$

b) Nous cherchons $w^2 = (x+iy)^2 = i$. Nous avons.

$$x^2 - y^2 + i2xy = i \text{ . Donc,}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(w^2) = x^2 - y^2 &= \operatorname{Re}(i) = 0 \\ |w^2| = x^2 + y^2 &= |i| = 1 \\ xy &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Comme $x, y > 0$ alors les sol^{ns} sont :

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) En utilisant le tableau

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4)$$

$$\text{ou bien } w^2 = i \Leftrightarrow (e^{i\theta})^2 = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow 2\theta = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi/4 \text{ (} k=0 \text{) ou } \theta = 5\pi/4 \text{ (} k=1 \text{)}$$

d) Clairement, $w_1 + w_2 = 0$.