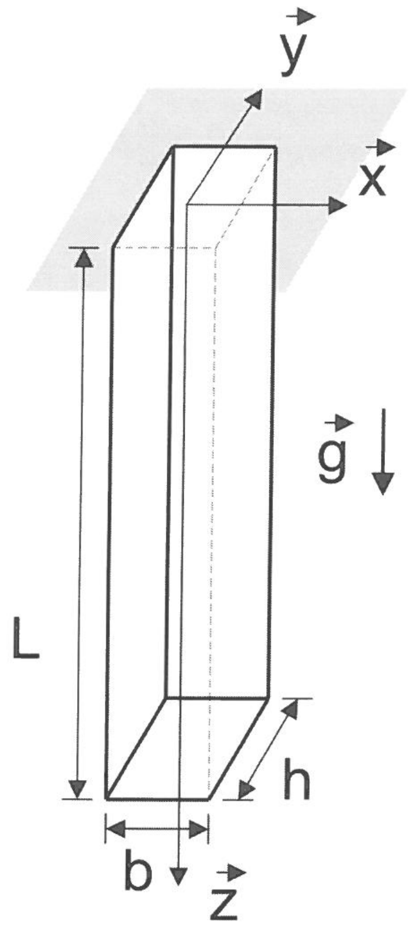
Feuille de TD 2-EF : Application de la méthode des Éléments Finis

Exercice 1 : barre soumise à son propre poids.
On considère une barre droite de longueur ***L***, de section ***S*** constante, faite d'un matériau homogène isotrope de module d'Young ***E*** et de densité ρ. La barre est encastrée à une extrémité et est soumise à son propre poids.



A] Résolution analytique.

- Établir l'équation d'équilibre, la loi de comportement et les conditions aux limites.
- Résoudre le problème analytiquement pour obtenir le déplacement **u(x)** en tout point.
- Calculer l'effort normal **N(x)** en tout point.

B] Résolution approchée par la méthode EF.

1^er^ cas : la colonne est modélisée par un élément linéaire à deux nœuds.

- Écrire la formulation variationnelle du problème.
- Rappeler les inconnues nodales de l'élément barre (i.e., traction/compression) à fonctions de forme linéaires. Comment s'écrit **u(x)** en fonction de ces inconnues et des fonctions d'interpolations **N1(x)** et **N2(x)** que vous expliciterez.
- Écrire formellement le problème sous la forme **[Ke][Q] = [Fe]**, avec **[Ke]** la matrice de rigidité de l'élément, et **[Fe]** le vecteur force sur l'élément.
- Calculer explicitement le vecteur **[Be]** de l'élément, en déduire **[Ke]**.
- Calculer explicitement le vecteur **[Fe]**.
- Prendre en compte les conditions aux limites et résoudre. Comparer avec la solution analytique. Discuter.

C] Résolution approchée par la méthode EF.

2ème cas : la colonne est modélisée par trois éléments linéaires à deux nœuds de longueurs égales L/3.

Au-delà de 2 éléments, il est plus commode de passer par « l'élément de référence ».

- Donner un paramétrage du système. Une fois défini, il ne faudra plus en changer.
- Rappeler le changement de variable pour passer du repère ***x*** au repère ***r***.
- Rappeler comment s'écrivent **N1(r)** et **N2(r)**, les fonctions de formes dans le repère de référence.
- Construire **[Bref]** à partir de **N1(r)** et **N2(r)**. Comment passe-t-on de **[Bref]** à **[Be]** ?
- Construire **[Kref]**. Comment passe-t-on de **[Kref]** à **[Ke]** ?
- Écrire les matrices de rigidités **[Ke$^{(1)}$)], [Ke$^{(2)}$)]** et **[Ke$^{(3)}$)]**, pour chaque éléments.
- Assembler les matrices pour construire la matrice de rigidité globale **[K]**
- Construire le vecteur **[F]**
- Prendre en compte les conditions aux limites, résoudre le problème **[K][Q] = [F].** Comparer avec la solution analytique, avec la solution à 1 élément et discuter.

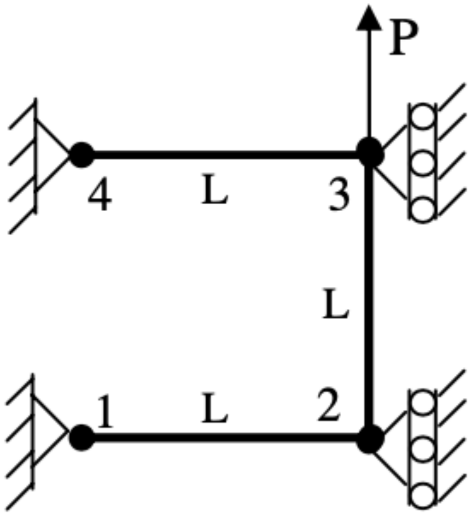
D] Résolution approchée par la méthode EF.

3ème cas : la colonne est modélisée par un élément quadratique à trois nœuds.

- Donner un paramétrage du système. Une fois défini, il ne faudra plus en changer.
- Rappeler comment s'écrivent **N1(r)**, **N2(r)** et **N3(r)** les fonctions de formes dans le repère de référence.
- Construire **[Bref]**
- Construire **[Kref]** et en déduite à **[Ke]**
- Construire **[Fref]** et en déduite à **[Fe]**
- Prendre en compte les conditions aux limites, résoudre le problème **[K][Q] = [F].** Comparer avec la solution analytique, avec la solution à 1 élément, a 2 éléments et discuter.

Exercice 2 : Cas d'un treillis.

L'objectif de cet exercice est d'étudier un treillis composé uniquement de 3 barres. Nous allons numéroter les nœuds et les éléments comme sur la figure si dessous.



- Écrire les conditions aux limites du problème. Donner le nombre de ddl du problème complet
- La matrice de rigidité d'une barre dans le repère globale est donnée par :

$$[K]_e^g = \left(\frac{ES}{L}\right)_e \begin{bmatrix} cos^2(\theta) & cos(\theta)sin(\theta) & -cos^2(\theta) & -cos(\theta)sin(\theta) \\ cos(\theta)sin(\theta) & sin^2(\theta) & -cos(\theta)sin(\theta) & -sin^2(\theta) \\ -cos^2(\theta) & -cos(\theta)sin(\theta) & cos^2(\theta) & cos(\theta)sin(\theta) \\ -cos(\theta)sin(\theta) & -sin^2(\theta) & cos(\theta)sin(\theta) & sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Question de cours : comment passe-t-on de l'écriture de **[Ke]** (la matrice de rigidité dans le repère de la barre) à **[Ke^g]** la matrice de rigidité dans le repère globale ?

- Calculer les matrices de rigidités pour chaque barre.
- Assembler les matrices et construire le vecteur force du repère globale **[F^g]**
- Déterminer les déplacements des nœuds.

Exercice 3 : Pour vous entrainer.

Déterminer les déplacements des nœuds pour le treillis suivant :