

Algorithmique Avancée : Paramètres de centralité

Exercice. Questions de cours

1. Rappeler la formule de calcul de la centralité d'intermédierité normalisée.

2. Calculer la centralité d'intermédierité normalisée du nœud 3 du réseau ci-dessous.

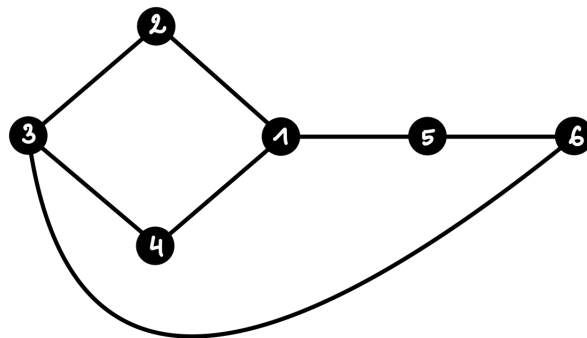


FIGURE 1 – Un réseau à 6 nœuds.

Exercice. La centralité d'isolement

Une nouvelle mesure de centralité, appelée **Centralité d'Isolement** (ou **Isolating Centrality** en anglais), a été introduite par Onur Ugurlu en 2022 dans l'article *Comparative Analysis of Centrality Measures for Identifying Critical Nodes in Complex Networks* publié dans le *Journal of Computational Science*. Cette mesure vise à identifier les nœuds dont la suppression déconnecte le graphe en un grand nombre de composantes connexes. Étant donné un réseau $G = (V, E)$, la Centralité d'Isolement d'un sommet $v \in V$ est définie comme :

$$C_I(v) = |N(v) \cap \text{Deg}_\delta(G)| \times d(v)$$

où :

- $N(v)$ est l'ensemble des voisins du sommet v ,
- $\text{Deg}_\delta(G)$ est l'ensemble des sommets du réseau G dont le degré est égal au degré minimum $\delta(G)$ du réseau G ,
- $d(v)$ est le degré du sommet v ,
- l'intersection de deux ensembles A et B est notée $A \cap B$ (ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B),
- le cardinal d'un ensemble A est noté $|A|$ (le nombre d'éléments de A).

Ainsi, un nœud a une Centralité d'Isolement élevée s'il a un degré élevé et qu'il est connecté à plusieurs sommets ayant un faible degré. Onur Ugurlu indique dans son article que la suppression des sommets ayant une Centralité d'Isolement élevée aura de grandes chances de déconnecter le réseau en plusieurs composantes connexes.

On considère le réseau suivant :

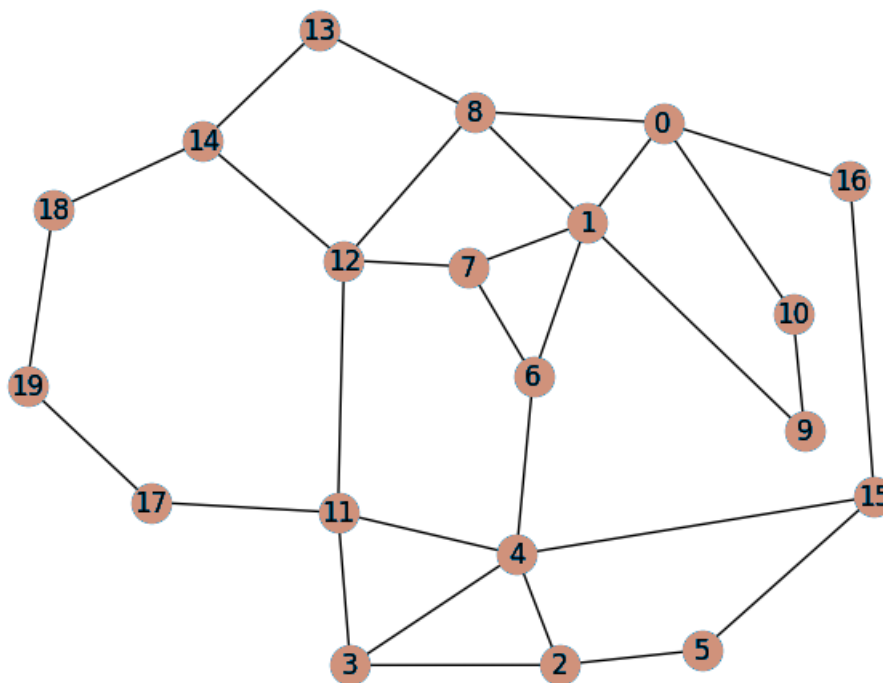


FIGURE 2 – Un réseau G .

1. Quel est le degré minimum $\delta(G)$ du réseau de la Figure 2? Lister les sommets de l'ensemble $Deg_\delta(G)$.

2. Lister les voisins du nœud 0 ainsi que les nœuds de degré $\delta(G)$ qui se trouvent dans le voisinage du nœud 0? Même question pour le nœud 12.

3. En déduire $|N(0) \cap Deg_\delta(G)|$ et $|N(12) \cap Deg_\delta(G)|$.

4. Calculer la Centralité d'Isolement $C_I(v) = |N(v) \cap Deg_\delta(G)| \times d(v)$ pour chaque sommet du réseau G (remplir le tableau).

Nœud v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$C_I(v)$																				

5. Étant donné un réseau quelconque, dans quel(s) cas un nœud aura une Centralité d'Isolement égale à 0 ?

6. De combien de composantes connexes est constitué le réseau de la figure 2 si on supprime les quatre nœuds ayant la plus grande Centralité d'Isolement ?

7. Compléter l'algorithme (en pseudo-code) ci-dessous pour qu'il calcule, étant donné en entrée un réseau G donné par liste d'arêtes, la Centralité d'Isolement de chaque nœud v de G . Vous pourrez, si vous en avez besoin, compléter les boucles déjà écrites (lignes 6, 7, 11, 12), puis vous ajouterez la partie manquante à partir de la ligne 13.

Algorithme : CENTRALITÉ D'ISOLEMENT

Données : Un réseau $G = (V, E)$ donné par liste d'arêtes.

Résultat : Une fonction $C_I : V \rightarrow \mathbb{N}$ (la Centralité d'Isolement de chaque nœud de G).

```
1 début
2    $n \leftarrow 0$ 
3   pour tous les  $x \in V$  faire
4      $d(x) \leftarrow 0$ 
5      $n \leftarrow n + 1$ 
6
7
8   pour tous les  $xy \in E$  faire
9      $d(x) \leftarrow d(x) + 1$ 
10     $d(y) \leftarrow d(y) + 1$ 
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34 retourner  $C_I$  ;
```

8. Exprimer la complexité de cet algorithme en fonction du nombre de nœuds n et du nombre de liens m (justifier) ?