Solutions TD 2 : Nombres complexes

Exercice 1.

$$(2+3i)(5-2i)+6i = 10-4i+15i-6i^2+6i = 10+11i+6+6i = 16+17i$$

$$(1-3i)^3 = (1-3i)(1-3i)(1-3i) = (1-6i-9)(1-3i) = 1-6i-9-3i+18i^2+27i = -26+i18.$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i+i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{2i}{2} = i.$$

Exercice 2. Soit $Z = (1+i)z + 1 - i$ et soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$
Nous avons $Z = (1+i)(x+iy)+1-i = x-y+1+i(x+y-1)$. Par suite, $Re(Z) = x-y+1$ puis Z est imaginaire pur si $Re(Z) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x - y + 1 = 0$.

L'ensemble des points d'affix z tels que Z soit un imaginaire pur est la droite d'équation $y = x + 1$.

Exercice 3. a) Soit $z = x + iy$.

$$(3-i)\overline{z} - 2 + 4i = 0 \iff (3-i)(x-iy) - 2 + 4i = 0 \iff$$
$$3x - i3y - ix + yi^2 - 2 + 4i = 0 \iff 3x - y - 2 + i(-3y - x + 4) = 0.$$

Par identification des points réelles et imaginaires, nous cherchons les solutions au système : $3x - y - 2 = 0$ et $-3y - x + 4 = 0$. La solution est donnée par $x = y = 1$. On trouve donc $z = 1 + i$.

(Deuxième méthode). On aurait pu procéder comme suit.

$$(3-i)\overline{z} - 2 + 4i = 0 \iff \overline{(3-i)\overline{z} - 2 + 4i} = 0 \iff (3+i)z - 2 - 4i = 0 \iff$$
$$z = \frac{2+4i}{3+i} = \frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-1)} = \frac{10+10i}{3^2+1^2} = 1+i$$

b)

$$(1+i)z + (3-i)\overline{z} = 1 + 2i \iff (1+i)(x+iy) + (3-i)(x-iy) = 1 + 2i$$

En développant, on obtient $(4x - 2y) + i(-2y) = 1 + 2i$. Par identification des points réelles et imaginaires, nous cherchons les solutions au système : $4x - 2y = 1$ et $-2y = 2$. La solution est donnée par $x = -1/4$ et $y = -1$. On trouve donc $z = -1/4 - i$.

c)

$$z\overline{z} + 4(z - \overline{z}) = 5 + 16i \iff (x+iy)(x-iy) + 4(x+iy-(x-iy)) = 5+16$$

$$x^2 + y^2 + 4(i2y) = 5 + 16i \iff x^2 + y^2 + i8y = 5 + 16i$$

Par identification des points réelles et imaginaires, nous cherchons les solutions au système : $x^2 + y^2 = 5$ et $8y = 16$. Les solutions sont données par $x = \pm 1$ et $y = 2$. On trouve donc deux solutions $z_1 = 1 + i2$ et $z_2 = -1 + i2$.

Exercice 4. Soient $z_1 = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$ et $z_2 = \sqrt{2}(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3)$. Nous avons que $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$ et $\theta_1 = \pi/4$ et $\theta_2 = 4\pi/3$.

a) On a $r_1 r_2 = 2, \theta_1 + \theta_2 = 19\pi/12$ et donc

$$z_1 z_2 = 2\left(\cos(19\pi/12) + i \sin(19\pi/12)\right)$$

b) On a $r_1/r_2 = 1, \theta_1 - \theta_2 = -13\pi/12$.

$$z_1/z_2 = \cos(-13\pi/12) + i \sin(-13\pi/12)$$

Comme $\sin x$ et $\cos x$ sont des fonctions 2π-périodiques alors

$$z_1/z_2 = \cos(-13\pi/12 + 2\pi) + i \sin(-13\pi/12 + 2\pi) = \cos(11\pi/12) + i \sin(11\pi/12).$$

c) On rappelle que si $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$. Nous avons donc

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4)).$$

Remarquons que comme $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \sin\theta)$. On peut donc exprimer

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(7\pi/4) - i \sin(7\pi/4)).$$

Exercice 5.

a) Pour $z = 1 - i$, on a $r = |z| = \sqrt{2}$, $\alpha = \tan^{-1}(1/1) = \pi/4$ et comme $a > 0$ et $b < 0$ alors $\theta = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$. On obtient donc $z = \sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4))$.

b) Pour $z = \sqrt{3} + i$, on a $r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, $\alpha = \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}/3) = \pi/6$ et comme $a, b > 0$ alors $\theta = \pi/6$. On obtient donc $z = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))$.

c) Pour $z = 2$, on a $r = |z| = 2$, $\alpha = \tan^{-1}(0/2) = \tan^{-1} 0 = 0$ et comme $a > 0, b = 0$ alors $\theta = \alpha = 0$. On obtient donc $z = 2(\cos(0) + i\sin(0)) = 2\cos(0) = 2$.

Exercice 6.
a) $e^{-i\pi/3} = 1(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) = \cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.
b) $3e^{i\pi/4} = 3(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = 3(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)$.
Observation : Clairement, les diagonales d'un carré de côté 1 mesurent $\sqrt{2}$ et l'angle formé par une diagonal et l'un de côté est egale à $\pi/4$. Donc $\cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Parei-ment pour $\sin\pi/4$.

Exercice 7.
a) Les racines de $z^2 - 2z + 4 = 0$ sont $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

b) En utilisant l'identité $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ nous avons $z^3 + 8 = 0 \iff (z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0$. D'après (a) on trouve que les solutions sont $z_1 = -2, z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

Exercice 8.
a) On cherche un nombre complex z tel que $z^2 = 4 - 3i$. Prenons $z = x + iy$, alors $\mathfrak{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = 4, |z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ et le signe $(\mathfrak{Im}(z^2))$ est négatif, c'est-à-dire $xy < 0$. En additionnant les deux dernières égalités on obtient $x^2 = 9/2$ et ensuite $y^2 = 1/2$ et comme $xy < 0$ alors les solutions sont $(x, y) = (3/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ et $(-3/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

b) On cherche un nombre complex z tel que $z^2 = 1 + 5i$. Prenons $z = x + iy$, alors $\mathfrak{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = 1, |z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$ et le signe $(\mathfrak{Im}(z^2))$ est positif, c'est-à-dire $xy > 0$. En additionnant les deux dernières égalités on obtient $x^2 = \frac{\sqrt{26}+1}{2}$ et ensuite $y^2 = \frac{\sqrt{26}-1}{2}$ et comme $xy > 0$ alors les solutions sont $(x, y) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{26}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{26}-1}{2}}\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{26}+1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{26}-1}{2}}\right)$

Exercice 9. a) $|z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$. Nous avons $\alpha = \arctan(\frac{2}{2}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Comme $a > 0, b < 0$ alors $\theta = 2\pi - \alpha = \frac{7\pi}{4}$. On a donc $z = \sqrt{8}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.
b) Soit $w = re^{i\theta}$, on cherche $r(e^{i\theta})^3 = w^3 = z = \sqrt{8}\frac{7\pi}{4}$ ou encore $r^3e^{i3\theta} = \sqrt{8}\frac{7\pi}{4}$. On en déduit que

$$r^3 = \sqrt{8} = 8^{1/2} \iff r = (8^{1/2})^{1/3} = (8^{1/3})^{1/2} = (2)^{1/2} = \sqrt{2}$$

En plus,

$$3\theta = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Alors,

pour $k = 0,\ 3\theta = \frac{7\pi}{4}$ et donc $\theta = \frac{7\pi}{12}$,
pour $k = 1,\ 3\theta = \frac{7\pi}{4} + 2\pi$ et donc $\theta = \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$ et
pour $k = 2,\ 3\theta = \frac{7\pi}{4} + 4\pi$ et donc $\theta = \frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{23\pi}{12}$.
Les racines sont donc :
$z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})$
$z_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})$ et
$z_3 = \sqrt{2}(\cos(\frac{23\pi}{12}) + i\sin(\frac{23\pi}{12}))$.

c) Si $t = -1 - i$ alors $|t| = \sqrt{2}$ et $\alpha = \arctan(\frac{1}{1}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Comme $a, b < 0$ alors $\theta = \alpha + \pi = \frac{5}{4}$. Donc la representation trigonométrique de t est $t = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}))$ et donc t est bien une racine cubique de t.

Exercice 10. D'après le théorème du binôme, on a

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Donc

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + 5\cos^4\theta i\sin\theta + 10\cos^3\theta i^2\sin^2\theta + 10\cos^2\theta i^3\sin^3\theta + 5\cos i^4\theta\sin^4\theta + i^5\sin^5\theta$$

$$= (\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta) + i(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta)$$

D'après la formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

On en déduit (en utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)

$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

$$\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$

Exercice 11. Soit $z = a + ib$.
a) $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\mathfrak{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = +i2b = 2i\mathfrak{Im}(z)$.
b) On. a $z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \iff z = x = \bar{z}$

On sait que $2\mathfrak{Re}(z) = z + \bar{z}$ impliquant $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ On également sait que $z - \bar{z} = i2b$ impliquant $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = b = \mathfrak{Im}(z)$.

c) $z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \iff z = x = \bar{z}$.

$z \in i\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur) $\iff \mathfrak{Re}(z) = 0 \iff z = iy = -(-ib) = -\bar{z}$.

Exercice 12. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$

a) $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = |z|^2$. En plus, $0 = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ est vérifié si et seulement si $x = y = 0$ et donc si et seulement si $z = 0$.

b) Soit $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z'\bar{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z'} = |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2 \\ &\leqslant |z|^2 + 2|\mathfrak{Re}(\bar{z}z')| + |z'|^2 \\ &\leqslant |z|^2 + 2|\bar{z}z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|\bar{z}||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ &= (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

et donc $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ puisque $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$ sont deux réels positifs.

Exercice 13. On va déterminer l'ensemble $E = \left\{ z = \frac{1+ix}{1-ix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

Comme $\mathfrak{Re}(1 - ix) = 1 \neq 0$, z est bien définie et de plus $|z| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = 1$ donc $z \in U =$ l'ensemble de nombres complexes de module 1.

On va montrer que $E = U \setminus \{-1\}$. Soit $z \in U$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}$$

Si $z \neq -1$ ce qui revient à dire $\theta \neq \pi$ impliquant $\theta \in [0, 2\pi[\setminus\{\pi/2\}$ et donc $\cos(\theta/2) \neq 0$. On peut écrire

$$z = \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \cdot \frac{1 + i\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}}{1 - i\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}} = \frac{1 + i\tan(\theta/2)}{1 - i\tan(\theta/2)} = \frac{1+ix}{1-ix}$$

avec $x = \tan(\theta/2) \in \mathbb{R}$ et donc $z \in E$.

Si $z = -1$ alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$z = \frac{1+ix}{1-ix} \iff -1 = \frac{1+ix}{1-ix} \iff 1 + ix = -(1 - ix) \iff 0x = 2$$

La dernière équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc $-1 \notin E$.